

形状最適化理論と製品設計への応用

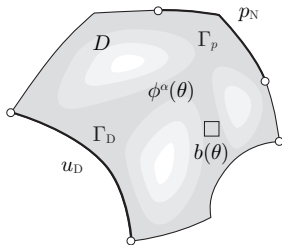
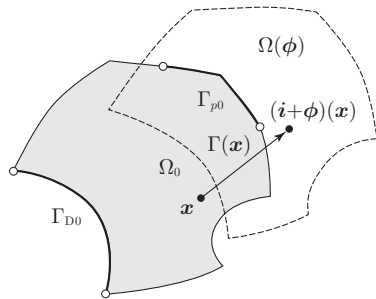
畔上 秀幸

名古屋大学 情報学研究科 複雑系科学専攻

AIMaP¹ チュートリアル「最適化理論の基礎と応用」
日本橋ライフサイエンスビルディング, 2018 年 1 月 19 日

はじめに

■ 形状最適化問題

(a) 密度変動 $\phi(\theta)$, 設計変数 $\theta : D \rightarrow \mathbb{R}$ (b) 領域変動 (設計変数) $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ 図 1.1: $d \in \{2, 3\}$ 次元の領域 $D, \Omega_0 \subset \mathbb{R}^d$ と設計変数

■ 概要

- 非線形計画問題としてみたときの最適設計問題の特徴 (§1) と解法 (§2)
- 最適設計問題の連続体形状最適化問題への拡張 (§3, §4, §5, §6)
- 製品設計への応用例の紹介 (§7 ~ §11)
- FreeFEM++を用いた実習 (§12)

問題 1.1 (状態決定問題)

図 2.4 の 1 次元線形弾性体に対して、長さ l , Young 率 e_Y , $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ および $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ が与えられたとき、

$$\mathbf{K}(\mathbf{a}) \mathbf{u} = \mathbf{p} \quad (1.2)$$

を満たす $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ を求めよ。ただし、式 (1.2) は式 (1.1) を表すことにする。

問題 1.1 の解 $\mathbf{u}$ に対して、**目的関数**と**制約関数** (あわせて**評価関数**とよぶ) を

$$f_0(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{u},$$

$$f_1(\mathbf{a}) = l(a_1 + a_2) - c_1 = \begin{pmatrix} l & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - c_1$$

とおく。 f_0 は平均コンプライアンス, f_1 は体積制約関数とよばれる。

設計変数の入る線形空間を $X = \mathbb{R}^2$ とおき、さらに、設計集合を

$$\mathcal{D} = \{\mathbf{a} \in X \mid \mathbf{a} \geq \mathbf{a}_0\}$$

とおく。ただし、 $\mathbf{a}_0 = (a_{01}, a_{02})^T > \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$ を定数ベクトルとする。また、状態変数の入る線形空間を $U = \mathbb{R}^2$ とおく。

問題 1.2 (平均コンプライアンス最小化問題)

$X = \mathbb{R}^2$ および $U = \mathbb{R}^2$ とおく。このとき、

$$\min_{(\mathbf{a}, \mathbf{u}) \in \mathcal{D} \times U} \{f_0(\mathbf{u}) \mid f_1(\mathbf{a}) \leq 0, \text{ 問題 1.1}\}$$

を満たす $\mathbf{a}$ を求めよ。

最適設計問題の特徴

最適設計問題は、状態決定問題が等式制約として加わった不等式つき非線形最適化問題のクラスとみなすことができる。

例題 1.3 (平均コンプライアンス最小化問題の数値例)

問題 1.2 において $l = 1$, $e_Y = 1$, $c_1 = 1$, $\mathbf{p} = (1, 1)^T$, $\mathbf{a}_0 = (0.1, 0.1)^T$ とおいて, $\mathbf{a}$ の最小点を求めよ.

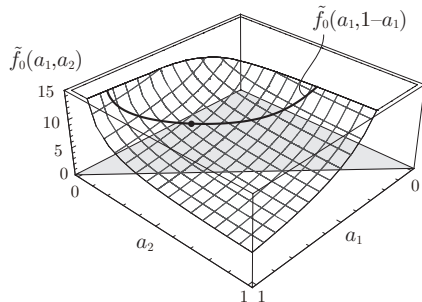


図 1.2: 設計変数の集合における平均コンプライアンス ($f_0(\mathbf{u}(\mathbf{a}))$ を $\tilde{f}_0(\mathbf{a})$ とかく)

§2 最適設計問題の解法

■ 勾配法と Newton 法 [1, 3.3 節, 3.5 節]

最初に制約なしの問題を考える.

問題 2.1 (制約なし最適化問題)

$X = \mathbb{R}^d$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ に対して,

$$\min_{x \in X} f(x)$$

を満たす x を求めよ.

評価関数 f の試行点 x_k 周りの Taylor 展開

$$f(x_k + y) = f(x_k) + g \cdot y + o(\|y\|_X)$$

において、勾配 g が計算されたとき、勾配法は、

$$\boxed{y_g \cdot (Ay) = -g \cdot y \quad \forall y \in X} \quad \Leftrightarrow \quad y_g = -A^{-1}g \quad (2.1)$$

を満たすように探索ベクトル $y_g \in X$ を求める方法である。ただし、 $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ は正定値対称行列とする。すなわち、

$$A = A^T, \quad \exists \alpha > 0 : y \cdot (Ay) \geq \alpha \|y\|_{\mathbb{R}^d}^2 \quad \forall y \in X.$$

実際、

$$f(x_k + \epsilon y_g) - f(x_k) = -\epsilon y_g \cdot (A y_g) + o(\epsilon) \leq -\epsilon \alpha \|y_g\|_X^2 + o(\epsilon).$$

式 (2.1) は,

$$q(\mathbf{y}_g) = \min_{\mathbf{y} \in X} \left\{ q(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \mathbf{y} \cdot (\mathbf{A} \mathbf{y}) + \mathbf{g} \cdot \mathbf{y} + f(\mathbf{x}_k) \right\}$$

を満たす $\mathbf{y}_g \in X$ を求めることと同値である.

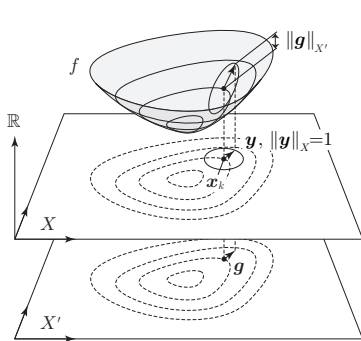


図 2.1: 勾配 g の定義

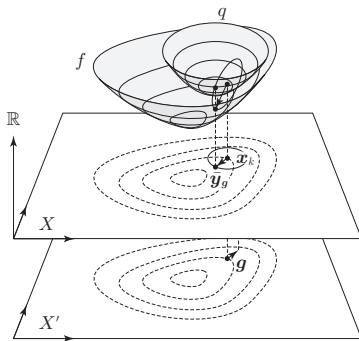


図 2.2: 勾配法

勾配 g の試行点 x_k 周りの Taylor 展開

$$g(x_k + y_g) = g + Hy_g + o(\|y_g\|_X)$$

を満たす勾配 g と Hesse 行列 H が計算されたとき, Newton 法は,

$$g(x_k + y_g) = g + Hy_g = 0_{X'}$$

とおくことにより探索ベクトル $y_g \in X$ を求める方法である. すなわち,

$$\boxed{y_g \cdot (Hy) = -g \cdot y \quad \forall y \in X}.$$

■ 等式制約つき問題における f の勾配と Hesse 行列 [1, 2.6 節]

最適化理論

- 設計変数を $x \in X = \mathbb{R}^d$ とする.
- 等式制約を $h = (h_1, \dots, h_n)^T : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n < d$) とかく.

最適設計理論

- 設計変数を $x = (\phi, u) \in X = \mathbb{R}^d = \Xi \times U = \mathbb{R}^{d-n} \times \mathbb{R}^n$ ($n < d$) とする.
 $\phi \in \Xi$ を設計変数, $u \in U$ を状態変数とよぶ.
- 等式制約を $h = (h_1, \dots, h_n)^T : X \rightarrow \mathbb{R}^n = U'$ とおく.

問題 2.2 (等式制約つき最適化問題)

$X = \mathbb{R}^d$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $h = (h_1, \dots, h_n)^T : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($n < d$) に対して, 次を満たす $x = (\phi, u)$ を求めよ.

$$\min_{x \in X} \{ f(x) \mid h(x) = 0_{U'} \}$$

問題 2.2 に対する Lagrange 関数を

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda \cdot h(x)$$

と定義する． $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T \in \mathbb{R}^n$ は Lagrange 乗数とよばれる．

定理 2.3 (極小点 1 次の必要条件 [1, 定理 2.6.4])

$f \in C^1(X; \mathbb{R})$, $h \in C^1(X; \mathbb{R}^n)$ および $x = (\phi, u) \in X$ において $h_{u^T}(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が正則行列とする．このとき， x が問題 2.2 の極小点ならば，

$$\mathcal{L}_x(x, \lambda) = 0_X,$$

$$\mathcal{L}_\lambda(x, \lambda) = h(x) = 0_{U'}$$

を満たす $\lambda \in \mathbb{R}^n$ が存在する．

定理 2.3 の条件は，次のようにかける．

$$\mathcal{L}'(x, \lambda) \begin{bmatrix} y \\ \hat{\lambda} \end{bmatrix} = \mathcal{L}_x(x, \lambda) [y] + \mathcal{L}_\lambda(x, \lambda) [\hat{\lambda}] = 0 \quad \forall (y, \hat{\lambda}) \in X \times U.$$

■ Lagrange 乗数法 (随伴変数法) による勾配の求め方

$x = (\phi, u) \in X = \Xi \times U$ に注意して, 問題 2.2 に対する Lagrange 関数を

$$\mathcal{L}(\phi, u, v) = f(\phi, u) + \mathcal{L}_S(\phi, u, v) = f(\phi, u) + v \cdot h(\phi, u)$$

とおく. $v \in U$ は Lagrange 乗数である. $\mathcal{L}$ の全微分に対して,

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}'(\phi, u, v)[\varphi, \hat{u}, \hat{v}] \\ &= \boxed{f_\phi(\phi, u)[\varphi] + \mathcal{L}_{S\phi}(\phi, u, v)[\varphi]} \\ & \quad + f_u(\phi, u)[\hat{u}] + \mathcal{L}_{Su}(\phi, u, v)[\hat{u}] \quad (= 0 \Leftarrow \boxed{f_u + \mathcal{L}_{Su}(\phi, u, v) = \mathbf{0}_{U'}}) \\ & \quad + \mathcal{L}_{Sv}(\phi, u, v)[\hat{v}] \quad (= 0 \Leftarrow \boxed{h(\phi, u) = \mathbf{0}_{U'}}) \\ &= g \cdot \varphi = \tilde{f}'(\phi)[\varphi] \quad \forall (\varphi, \hat{u}, \hat{v}) \in \Xi \times U \times U \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, $f(\phi, u(\phi))$ を $\tilde{f}(\phi)$ とかいた.

許容集合と許容方向集合あるいは接面を次のように定義する.

$$T_S(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in X \mid \mathbf{h}_{\mathbf{x}^\top}(\mathbf{x})[\mathbf{y}] = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\}.$$

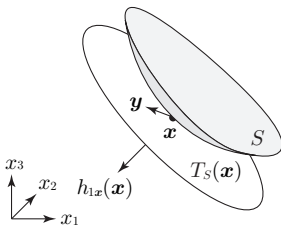


図 2.3: 許容集合 S と許容方向集合 $T_S(\boldsymbol{x})$ ($X = \mathbb{R}^3$, $n = 1$)

定理 2.4 (極小点 2 次の必要条件 [1, 定理 2.6.6])

問題 2.2 において, $f \in C^2(X; \mathbb{R})$ および $h \in C^2(X; U)$ とする.
 $x = (\phi, u) \in S$ において $\partial_X h_1(x), \dots, \partial_X h_n(x)$ が 1 次独立とする. このとき, x が極小点ならば, 次が成り立つ.

$$\mathcal{L}_{xx}(x, \lambda)[y, y] \geq 0 \quad \forall y \in T_S(x)$$

定理 2.5 (極小点 2 次の十分条件 [2, Theorem 2.3])

問題 2.2 において, $f \in C^2(X; \mathbb{R})$ および $h \in C^2(X; U)$ とする. $x \in X$ において $\partial_X h_1(x), \dots, \partial_X h_n(x)$ が 1 次独立とする. このとき, x が定理 2.3 の条件を満たし,

$$\mathcal{L}_{xx}(x, \lambda)[y, y] > 0 \quad \forall y \in T_S(x)$$

を満たす (x, λ) が存在するならば, x は問題 2.2 の極小点である.

Hesse 行列は次のように得られる． $\mathcal{L}$ の (ϕ, u) に対する 2 階偏微分は，

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}_{(\phi, u)(\phi, u)}(\phi, u, v) [(\varphi_1, \hat{v}_1), (\varphi_2, \hat{v}_2)] \\
 &= (\mathcal{L}_\phi(\phi, u, v) [\varphi_1] + \mathcal{L}_u(\phi, u, v) [\hat{v}_1])_\phi [\varphi_2] \\
 & \quad + (\mathcal{L}_\phi(\phi, u, v) [\varphi_1] + \mathcal{L}_u(\phi, u, v) [\hat{v}_1])_u [\hat{v}_2] \\
 &= \mathcal{L}_{\phi\phi}(\phi, u, v) [\varphi_1, \varphi_2] + \mathcal{L}_{u\phi}(\phi, u, v) [\hat{v}_1, \varphi_2] \\
 & \quad + \mathcal{L}_{\phi u}(\phi, u, v) [\varphi_1, \hat{v}_2] + \mathcal{L}_{uu}(\phi, u, v) [\hat{v}_1, \hat{v}_2] \\
 & \quad \forall (\varphi_1, \hat{v}_1), (\varphi_2, \hat{v}_2) \in T_S(\phi, u)
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

となる．

一方, $j \in \{1, 2\}$ として,

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{S(\phi, u)}(\phi, u, v)[\varphi_j, \hat{v}_j] \\ &= \mathcal{L}_{S\phi}(\phi, u, v)[\varphi_j] + \mathcal{L}_{Su}(\phi, u, v)[\hat{v}_j] \\ &= \boxed{\mathcal{L}_{S\phi}(\phi, u, v)[\varphi_j] + \mathcal{L}_S(\phi, \hat{v}_j, v) = 0} \quad \forall (\varphi_j, \hat{v}_j) \in T_S(\phi, u) \end{aligned}$$

が成り立つ. これより,

$$\hat{v}_j = p(\phi, u, v)[\varphi_j] \quad (2.3)$$

が得られると仮定する.

式 (2.3) を式 (2.2) に代入して, 次が得られるとき, H は Hesse 行列となる.

$$\begin{aligned} h(\phi, u, v)[\varphi_1, \varphi_2] &= \varphi_1 \cdot (H\varphi_2) \\ &= \mathcal{L}_{(\phi, u)(\phi, u)}(\phi, u, v)[(\varphi_1, p(\phi, u, v)[\varphi_1]), (\varphi_2, p(\phi, u, v)[\varphi_2])] \\ &= \varphi_1 \cdot (H\varphi_2) = \tilde{f}''(\phi)[\varphi_1, \varphi_2] \quad (\tilde{f}(\phi) = f(\phi, u(\phi))) \end{aligned}$$

■ 簡単な問題を用いた検証 [1, 1.1 節]

問題 2.6 (平均コンプライアンス)

$\Xi = \mathbb{R}^2$ および $U = \mathbb{R}^2$ とおく. このとき,

$$\min_{(a,u) \in \Xi \times U} \{ f(u) = p \cdot u \mid K(a)u = p \}$$

を満たす (a, u) を求めよ.

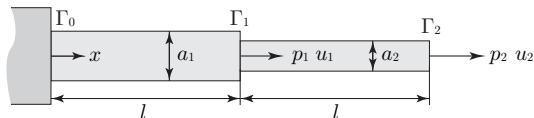


図 2.4: 2つの断面積をもつ1次元線形弾性体

■ 代入法

状態方程式の解 $\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{a})\mathbf{p}$ を $f(\mathbf{u})$ に代入すれば,

$$\tilde{f}(\mathbf{a}) = f(\mathbf{u}(\mathbf{a})) = \mathbf{p} \cdot (\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{a})\mathbf{p}) = \frac{l}{e_Y} \left(\frac{(p_1 + p_2)^2}{a_1} + \frac{p_2^2}{a_2} \right)$$

を得る. これを $\mathbf{a}$ で偏微分して, 次を得る.

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial a_1} \\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial a_2} \end{pmatrix} = \frac{l}{e_Y} \begin{pmatrix} -\frac{(p_1 + p_2)^2}{a_1^2} \\ -\frac{p_2^2}{a_2^2} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

さらに、それをもう一度 a で偏微分すれば、

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial a_1 \partial a_1} & \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial a_1 \partial a_2} \\ \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial a_2 \partial a_1} & \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial a_2 \partial a_2} \end{pmatrix} = \frac{l}{e_Y} \begin{pmatrix} \frac{2(p_1 + p_2)^2}{a_1^3} & 0 \\ 0 & \frac{2p_2^2}{a_2^3} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

となる。 $a_1, a_2 > 0$ のとき、 $\mathbf{H}$ は正定値となる。

■ Lagrange 乗数法

問題 2.6 に対する Lagrange 関数を

$$\mathcal{L}(a, u, v) = f(u) + \mathcal{L}_S(a, u, v) = p \cdot u + v \cdot (-K(a)u + p)$$

とおく. $v \in U$ は Lagrange 乗数である. $\mathcal{L}$ の全微分に対して,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(a, u, v)[b, \hat{u}, \hat{v}] &= - \left\{ v \cdot \left(\frac{\partial K(a)}{\partial a_1} u \quad \frac{\partial K(a)}{\partial a_2} u \right) \right\} b \\ &\quad + p \cdot \hat{u} - v \cdot K(a) \hat{u} \quad (= 0 \Leftarrow \boxed{K^T(a) v = p}) \\ &\quad + \hat{v} \cdot (-K(a) u + p) \quad (= 0 \Leftarrow \boxed{K(a) u = p}) \\ &= g \cdot b \quad \forall (b, \hat{u}, \hat{v}) \in \Xi \times U \times U \end{aligned} \tag{2.6}$$

が成り立つ. ここで, g は代入法による式 (2.4) と一致する.

Hesse 行列は次のように得られる。許容集合と許容方向集合あるいは接面を

$$S = \{(\mathbf{a}, \mathbf{u}) \in \Xi \times U \mid \mathbf{h}(\mathbf{a}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}_{U'}\},$$

$$T_S(\mathbf{a}, \mathbf{u}) = \{(\mathbf{b}, \hat{\mathbf{v}}) \in \Xi \times U \mid \mathbf{h}_{\mathbf{a}\mathbf{u}}(\mathbf{a}, \mathbf{u})[\mathbf{b}, \hat{\mathbf{v}}] = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\}.$$

とおく。 $\mathcal{L}$ の設計変数 $(\mathbf{a}, \mathbf{u})$ に対する 2 階偏微分は,

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{(\mathbf{a}, \mathbf{u})(\mathbf{a}, \mathbf{u})}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v})[(\mathbf{b}_1, \hat{\mathbf{v}}_1), (\mathbf{b}_2, \hat{\mathbf{v}}_2)] \\ &= (\mathcal{L}_{0\mathbf{a}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v})[\mathbf{b}_1] + \mathcal{L}_{0\mathbf{u}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v})[\hat{\mathbf{v}}_1])_{\mathbf{a}}[\mathbf{b}_2] \\ & \quad + (\mathcal{L}_{0\mathbf{a}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v})[\mathbf{b}_1] + \mathcal{L}_{0\mathbf{u}}(\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{v})[\hat{\mathbf{v}}_1])_{\mathbf{u}}[\hat{\mathbf{v}}_2] \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{b}_2 \\ \hat{\mathbf{v}}_2 \end{pmatrix} \cdot \left(\mathbf{H}_{\mathcal{L}_S} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \hat{\mathbf{v}}_1 \end{pmatrix} \right) \quad \forall (\mathbf{b}_1, \hat{\mathbf{v}}_1), (\mathbf{b}_2, \hat{\mathbf{v}}_2) \in T_S(\mathbf{a}, \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

となる。ここで、次のようである。

$$\mathbf{H}_{\mathcal{L}_S} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{Saa} & \mathcal{L}_{Sau} \\ \mathcal{L}_{Sua} & \mathcal{L}_{Su u} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} & \begin{pmatrix} \mathbf{v}^T \mathbf{K}_{a_1} \\ \mathbf{v}^T \mathbf{K}_{a_2} \end{pmatrix} \\ (\mathbf{K}_{a_1}^T \mathbf{v} \quad \mathbf{K}_{a_2}^T \mathbf{v}) & \mathbf{0}_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} \end{pmatrix}$$

一方, $j \in \{1, 2\}$ に対して

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{S(a,u)}(a, u, v) [b_i, \hat{v}_j] &= v \cdot \{ - (K'(a) [b_i]) u - K(a) (\hat{v}_j) \} = 0 \\ \forall (b_i, \hat{v}_j) &\in T_S(a, u) \end{aligned}$$

より, 次を得る.

$$\hat{v}_j = -K^{-1}(a) (K'(a) [b_i]) = \begin{pmatrix} -\frac{u_1}{a_1} & 0 \\ -\frac{u_1}{a_1} & -\frac{u_2 - u_1}{a_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{i1} \\ b_{i2} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

式 (2.8) を式 (2.7) に代入し, 自己随伴関係を用いれば,

$$\begin{aligned} h(a, u, v) [b_1, b_2] &= \mathcal{L}_{(a,u)(a,u)}(a, u, v) [(b_1, \hat{v}_1), (b_2, \hat{v}_2)] \\ &= b_1 \cdot (H b_2) \end{aligned} \quad (2.9)$$

となる. ここで, H は代入法で得られた式 (2.5) と一致する.

■ 制約つき問題における勾配法と Newton 法 [1, 3.7 節, 3.8 節]

これ以降, 最適設計問題における設計変数 ϕ を x とかくことにする.

問題 2.7 (制約つき最適化問題)

$X = \mathbb{R}^d$ とする. $f_0, \dots, f_m \in C^2(X; \mathbb{R})$ に対して,

$$\min_{x \in X} \{ f_0(x) \mid f_1(x) \leq 0, \dots, f_m(x) \leq 0 \}$$

を満たす x を求めよ.

不等式制約が満たされる許容集合と有効な制約に対する添え字の集合を

$$S = \{ x \in X \mid f_1(x) \leq 0, \dots, f_m(x) \leq 0 \},$$

$$I_A(x) = \{ i \in \{1, \dots, m\} \mid f_i(x) \geq 0 \} = \{ i_1, \dots, i_{|I_A(x)|} \}$$

とおく.

問題 2.8 (制約つき問題に対する勾配法)

試行点 $\mathbf{x}_k \in S$ において $f_0(\mathbf{x}_k), f_{i_1}(\mathbf{x}_k) = 0, \dots, f_{i_{|I_A|}}(\mathbf{x}_k) = 0, \mathbf{g}_0(\mathbf{x}_k), \mathbf{g}_{i_1}(\mathbf{x}_k), \dots, \mathbf{g}_{i_{|I_A|}}(\mathbf{x}_k)$ を既知とする. また, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{d \times d}$ を正定値実対称行列, c_a を正の定数とする. このとき,

$$q(\mathbf{y}_g) = \min_{\mathbf{y} \in X} \left\{ q(\mathbf{y}) = \frac{1}{2} \mathbf{y} \cdot (c_a \mathbf{A} \mathbf{y}) + \mathbf{g}_0(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{y} + f_0(\mathbf{x}_k) \right. \\ \left. f_i(\mathbf{x}_k) + \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{y} \leq 0 \text{ for } i \in I_A(\mathbf{x}_k) \right\}$$

を満たす $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{y}_g$ を求めよ.

問題 2.8 の Lagrange 関数を次のようにおく.

$$\mathcal{L}_Q(\mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}_{k+1}) = q(\mathbf{y}) + \sum_{i \in I_A(\mathbf{x}_k)} \lambda_{i, k+1} (f_i(\mathbf{x}_k) + \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{y})$$

問題 2.8 の最小点 $\mathbf{y}_g$ における KKT 条件は,

$$\mathcal{L}_{Q\mathbf{y}}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}_{k+1}) = c_a \mathbf{A} \mathbf{y}_g + \mathbf{g}_0(\mathbf{x}_k) + \sum_{i \in I_A(\mathbf{x}_k)} \lambda_{i\,k+1} \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_k) = \mathbf{0}_{X'}, \quad (2.10)$$

$$\mathcal{L}_{Q\boldsymbol{\lambda}_{k+1}}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}_{k+1}) = f_i(\mathbf{x}_k) + \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{y}_g \leq 0 \quad \text{for } i \in I_A(\mathbf{x}_k), \quad (2.11)$$

$$\lambda_{i\,k+1} (f_i(\mathbf{x}_k) + \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_k) \cdot \mathbf{y}_g) = 0 \quad \text{for } i \in I_A(\mathbf{x}_k), \quad (2.12)$$

$$\lambda_{i\,k+1} \geq 0 \quad \text{for } i \in I_A(\mathbf{x}_k) \quad (2.13)$$

となる.

ここで, $\mathbf{y}_{g0}, \mathbf{y}_{gi_1}, \dots, \mathbf{y}_{gi_{|I_A|}}$ を $i \in I_A(\mathbf{x}_k)$ ごとに勾配法を適用したときの解とする. すなわち,

$$\mathbf{y}_{gi} = -(c_a \mathbf{A})^{-1} \mathbf{g}_i \quad \text{for } i \in I_A(\mathbf{x}_k).$$

また, $\lambda_{k+1} \in \mathbb{R}^{|I_A|}$ を未知の Lagrange 乗数とする. このとき,

$$\mathbf{y}_g = \mathbf{y}_g(\lambda_{k+1}) = \mathbf{y}_{g0} + \sum_{i \in I_A(\mathbf{x}_k)} \lambda_{i \ k+1} \mathbf{y}_{gi}$$

は式 (2.10) を満たす. さらに, 式 (2.11) は

$$\begin{pmatrix} \mathbf{g}_{i_1} \cdot \mathbf{y}_{gi_1} & \cdots & \mathbf{g}_{i_1} \cdot \mathbf{y}_{gi_{|I_A|}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{g}_{i_{|I_A|}} \cdot \mathbf{y}_{gi_1} & \cdots & \mathbf{g}_{i_{|I_A|}} \cdot \mathbf{y}_{gi_{|I_A|}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{i_1 \ k+1} \\ \vdots \\ \lambda_{i_{|I_A|} \ k+1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_{i_1} + \mathbf{g}_{i_1} \cdot \mathbf{y}_{g0} \\ \vdots \\ f_{i_{|I_A|}} + \mathbf{g}_{i_{|I_A|}} \cdot \mathbf{y}_{g0} \end{pmatrix}$$

となる. この連立一次方程式より, λ_{k+1} が決定される.

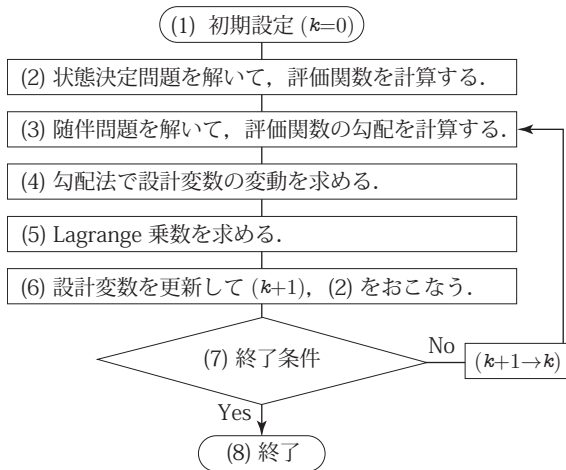


図 2.6: 制約つき最適化問題に対する勾配法のアルゴリズム

問題 2.9 (制約つき問題に対する Newton 法)

試行点 $\boldsymbol{x}_k \in X$ において, $\boldsymbol{\lambda}_k \in \mathbb{R}^{|I_A|}$ は KKT 条件を満たすとする. また,

$$\boldsymbol{H}_{\mathcal{L}}(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{x}_k) + \sum_{i \in I_A(\boldsymbol{x}_k)} \lambda_{ik} \boldsymbol{H}_i(\boldsymbol{x}_k)$$

とおく. このとき,

$$q(\boldsymbol{y}_g) = \min_{\boldsymbol{y} \in X} \left\{ q(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{y} \cdot (\boldsymbol{H}_{\mathcal{L}}(\boldsymbol{x}_k) \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{g}_0(\boldsymbol{x}_k) \cdot \boldsymbol{y} + f_0(\boldsymbol{x}_k) \right. \\ \left. f_i(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_k) \cdot \boldsymbol{y} \leq 0 \text{ for } i \in I_A(\boldsymbol{x}_k) \right\}$$

を満たす $\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{y}_g$ を求めよ.

勾配法の A を $\boldsymbol{H}_{\mathcal{L}}$ におきかえれば Newton 法になる.

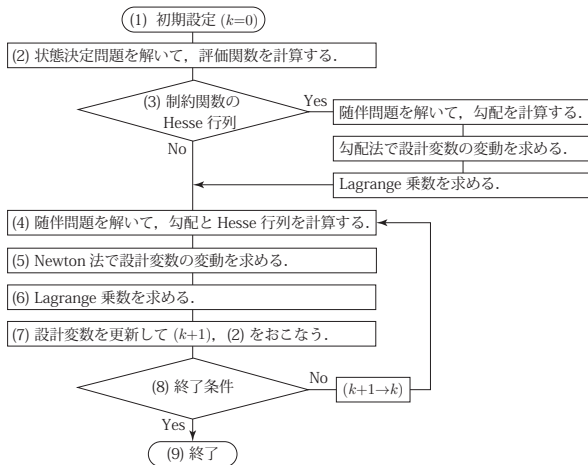


図 2.7: 制約つき最適化問題に対する Newton 法のアルゴリズム

■ 数値例

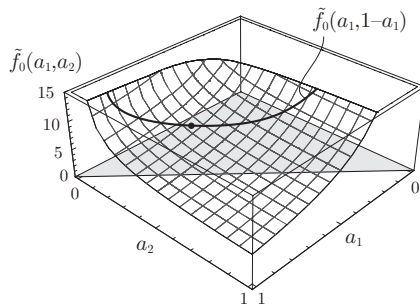
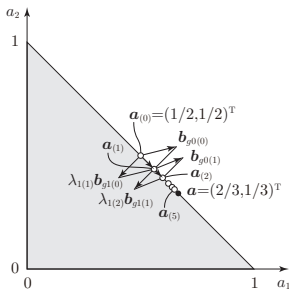
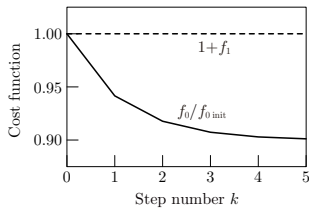


図 2.8: 体積制約つき平均コンプライアンス最小化問題の数値例

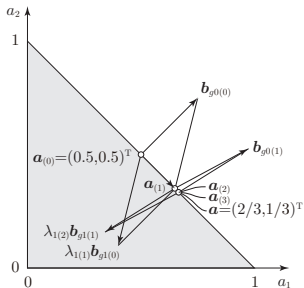


(a) 試行点の推移

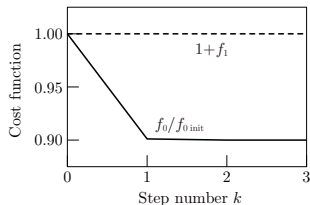


(b) 評価関数の履歴

図 2.9: 勾配法による数値解



(a) 試行点の推移



(b) 評価関数の履歴

図 2.10: Newton 法による数値解

§3 関数解析の基礎

■ 関数空間 [1, 4.3 節]

- $W^{k,p}(\Omega; \mathbb{R}^d)$: k 階微分まで p 乗可積分な関数 $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ の集合 (Sobolev 空間: 完備なノルム空間 (Banach 空間) の性質をもつ)
- $W^{0,2}(\Omega; \mathbb{R}^d) = L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$
- $W^{k,2}(\Omega; \mathbb{R}^d) = H^k(\Omega; \mathbb{R}^d)$: $H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ の場合, たとえば, 内積

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)} = \int_{\Omega} \{ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{u}^T) \cdot (\nabla \mathbf{v}^T) \} \, dx$$

に対して完備な内積空間 (Hilbert 空間) の性質をもつ.

- $W^{0,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^d) = L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d)$: 有界かつ可積分な関数の集合
- $W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^d)$: Lipschitz 連続な関数の集合
- $C^{0,\sigma}(\Omega; \mathbb{R})$: $\sigma \in (0, 1]$ に対して, Hölder 連続な関数の集合 ($\sigma = 1$ のとき, Lipschitz 連続に対応する)

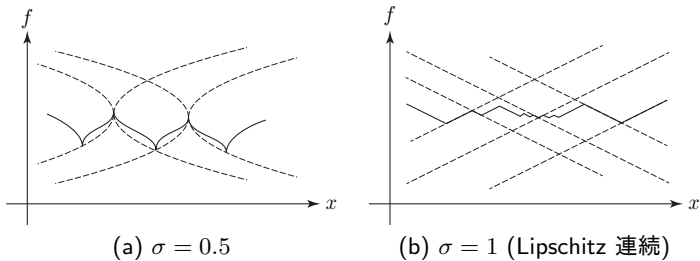


図 3.1: Hölder 連続な関数

■ 関数空間の包含関係

定理 3.1 (Sobolev の埋蔵定理)

$k \in \{1, 2, \dots\}$, $p \in [1, \infty)$ に対して, $k + 1 - d/p \geq k - d/q$ ならば

$$W^{k+1,p}(\Omega; \mathbb{R}) \subset W^{k,q}(\Omega; \mathbb{R})$$

が成り立つ. さらに, $0 < \sigma = k - d/p < 1$ ならば,

$$W^{k,p}(\Omega; \mathbb{R}) \subset C^{0,\sigma}(\Omega; \mathbb{R})$$

となる.

定理 3.2 (Hölder の不等式)

$d \in \mathbb{N}$ に対して, Ω を $\mathbb{R}^d$ 上の可測集合とし, $p, q \in (1, \infty)$ は

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

を満たすとする. このとき, $f \in L^p(\Omega; \mathbb{R})$ と $g \in L^q(\Omega; \mathbb{R})$ に対して

$$\|fg\|_{L^1(\Omega; \mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^p(\Omega; \mathbb{R})} \|g\|_{L^q(\Omega; \mathbb{R})}$$

が成り立つ.

■ 双対空間 [1, 4.4 節]

Banach 空間 X に対して,

$$f(v) = \int_{\Omega} uv \, dx = \langle u, v \rangle \quad \forall v \in X$$

を満たすような有界線形汎関数 $f(\cdot) = \langle u, \cdot \rangle$ の集合 (u の集合) を X' とかいて, X の**双対空間**という. また, $\langle \cdot, \cdot \rangle : X' \times X \rightarrow \mathbb{R}$ を $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X' \times X}$ ともかいて, **双対積**という.

定義 3.3 (k 階の Fréchet 微分)

X と Y を $\mathbb{R}$ 上の Banach 空間とする. $x \in X$ の近傍 $B \subset X$ 上で $f: B \rightarrow Y$ が定義されているとする. 任意の変動ベクトル $y_1 \in X$ に対して,

$$\lim_{\|y_1\|_X \rightarrow 0} \frac{\|f(x + y_1) - f(x) - f'(x)[y_1]\|_Y}{\|y_1\|_X} = 0 \quad (3.1)$$

を満たす有界線形作用素 $f'(x)[\cdot] \in \mathcal{L}(X; Y)$ が存在するとき, $f'(x)[y_1]$ を f の x における **Fréchet 微分** という. さらに, 任意の $y_2 \in X$ に対して,

$$\lim_{\|y_2\|_X \rightarrow 0} \frac{\|f'(x + y_2)[y_1] - f'(x)[y_1] - f''(x)[y_1, y_2]\|_Y}{\|y_2\|_X} = 0$$

を満たす $f''(x)[y_1, \cdot] \in \mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X; Y))$ が存在するとき, $f''(x)[y_1, y_2]$ を f の x における 2 階の Fréchet 微分という. $\mathcal{L}(X; \mathcal{L}(X; Y))$ を $\mathcal{L}^2(X \times X; Y)$ とかく. $k \in \{3, 4, \dots\}$ 階の Fréchet 微分 $f^{(k)}$ も同様に定義される.

式 (3.1) は,

$$f(x + y_1) = f(x) + f'(x)[y_1] + o(\|y_1\|_X)$$

ともかける. ここで, $o(\|y_1\|_X)$ は

$$\lim_{\|y_1\|_X \rightarrow 0} \frac{o(\|y_1\|_X)}{\|y_1\|_X} = 0_Y$$

のように定義される.

§4 偏微分方程式の境界値問題

■ 線形弾性問題 [1, 5.4 節]

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ の境界 $\partial\Omega$ は **Lipchitz 連続** とする. ひずみと応力を次のようにかく.

$$E(u) = \frac{1}{2} \left\{ \nabla u^T + (\nabla u^T)^T \right\}, \quad S(u) = CE(u)$$

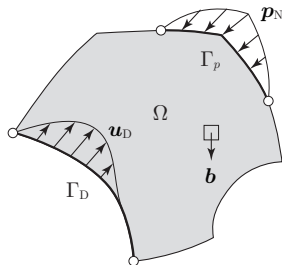


図 4.1: 線形弾性問題

問題 4.1 (線形弾性問題)

体積力 $b: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$, 境界力 $p_N: \Gamma_N \rightarrow \mathbb{R}^d$, 既知変位 $u_D: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ に対して,

$$-\nabla^T S(u) = b^T \quad \text{in } \Omega,$$

$$S(u) \nu = p_N \quad \text{on } \Gamma_N,$$

$$u = u_D \quad \text{on } \Gamma_D$$

を満たす変位 $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ を求めよ.

$$U = \{ \mathbf{u} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d) \mid \mathbf{u} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \Gamma_D \},$$

$$U(\mathbf{u}_D) = \{ \mathbf{u} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d) \mid \mathbf{u} = \mathbf{u}_D \text{ on } \Gamma_D \},$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) \, dx,$$

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{p}_N \cdot \mathbf{v} \, d\gamma.$$

問題 4.2 (線形弾性問題の弱形式)

$\mathbf{b} \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)$, $\mathbf{p}_N \in L^2(\Gamma_N; \mathbb{R}^d)$, $\mathbf{C} \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^{d \times d \times d \times d})$, $\mathbf{u}_D \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^d)$ のとき,

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in U$$

を満たす $\mathbf{u} \in U(\mathbf{u}_D)$ を求めよ.

■ 楕円型偏微分方程式の弱解の一意存在 [1, 5.2 節]

定理 4.3 (Lax-Milgram の定理)

U を実 Hilbert 空間とする. a は強圧的かつ有界とする. また, $l \in U'$ とする. このとき, 問題 4.2 の解 $u \in U$ は一意に存在する.

例題 4.4 (線形弾性問題の解の一意存在)

問題 4.2 において, $|\Gamma_D| > 0$ のとき, 解 $u \in U(u_D)$ は一意に存在することを示せ.

(解答) 次のおきかえにより, Lax-Milgram の定理の仮定が成り立つことが確かめられる.

$$a(\tilde{u}, v) = l(v) - a(u_D, v) \hat{l}(v)$$

□

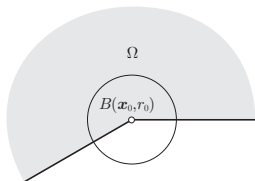
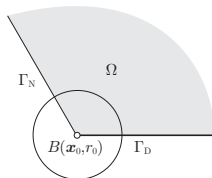
(a) 同一種境界で開き角が $\alpha > \pi$ (b) 混合境界で開き角が $\alpha > \pi/2$

図 4.3: 特異性が現れる角をもつ 2 次元領域

定理 4.5 (角点近傍における解の正則性 [1, 定理 5.3.2])

厳密解 u は x_0 の近傍で $u \in H^s(B(x_0, r_0) \cap \Omega; \mathbb{R}^2)$ に入る. ただし,

- ① Γ_1 と Γ_2 が同一種境界ならば, $\alpha \in [\pi, 2\pi)$ のとき $s \in (3/2, 2]$
- ② Γ_1 と Γ_2 が混合境界ならば, $\alpha \in [\pi/2, \pi)$ のとき $s \in (3/2, 2]$, および $\alpha \in [\pi, 2\pi)$ のとき $s \in (5/4, 3/2]$ となる.

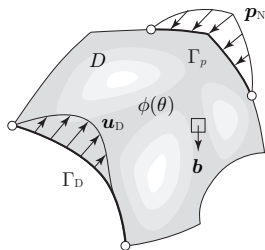
定理 4.6 (角点近傍における解の正則性)

厳密解 u は x_0 の近傍で

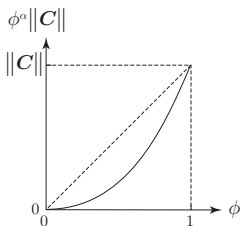
- ① Γ_1 と Γ_2 が同一種境界ならば, $\alpha < \pi$ のとき,
- ② Γ_1 と Γ_2 が混合境界ならば, $\alpha < \pi/2$ のとき,

$W^{1,\infty}(B(x_0, r_0) \cap \Omega; \mathbb{R}^2)$ に入る.

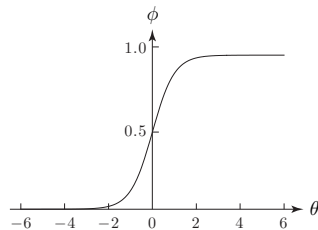
§5 線形弾性体の密度型位相最適化 [1, 第8章]



(a) 線形弾性体



(b) 密度 ϕ と剛性 $\phi^\alpha \|C\|$



(c) 密度 $(\tanh \theta + 1) / 2$

図 5.1: SIMP (solid isotropic material with penalization) モデルと設計変数 $\theta : D \rightarrow \mathbb{R}$

■ 線形空間と許容集合 [1, 8.1 節]

設計変数を $\theta \in \mathcal{D} \subset X$ とおく．ただし，線形空間 X と許容集合 $\mathcal{D}$ を

$$X = H^1(D; \mathbb{R}),$$

$$\mathcal{D} = X \cap W^{1,\infty}(D; \mathbb{R})$$

とおく．密度を

$$\phi(\theta) = \frac{1}{2} \tanh \theta + \frac{1}{2}$$

とおく．さらに，状態変数 (状態決定問題の解) $\mathbf{u}$ の線形空間と許容集合を

$$U = \{ \mathbf{u} \in H^1(D; \mathbb{R}^d) \mid \mathbf{u} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \Gamma_D \},$$

$$U(\mathbf{u}_D) = \{ \mathbf{u} \in H^1(D; \mathbb{R}^d) \mid \mathbf{u} = \mathbf{u}_D \text{ on } \Gamma_D \},$$

$$\mathcal{S} = U \cap W^{1,2q_R}(D; \mathbb{R}^d), \quad \mathcal{S}(\mathbf{u}_D) = U(\mathbf{u}_D) \cap W^{1,2q_R}(D; \mathbb{R}^d)$$

とおく．ただし， $q_R > d$ とする．

■ 状態決定問題 (等式制約)[1, 8.8 節]

問題 5.1 (θ 型線形弾性問題)

$\alpha > 1$ を定数とする. $\theta \in \mathcal{D}$, $\mathbf{b}(\theta)$, $\mathbf{p}_N$ に対して,

$$-\nabla^T(\phi^\alpha(\theta) \mathbf{S}(\mathbf{u})) = \mathbf{b}^T(\theta) \quad \text{in } D,$$

$$\phi^\alpha(\theta) \mathbf{S}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} = \mathbf{p}_N \quad \text{on } \Gamma_N,$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_D \quad \text{on } \Gamma_D$$

を満たす $\mathbf{u} \in \mathcal{S}(\mathbf{u}_D)$ を求めよ.

■ 評価関数

平均コンプライアンスと領域の大きさに対する制約関数を次のようにおく．

$$f_0(\theta, \mathbf{u}) = \int_D \mathbf{b}(\theta) \cdot \mathbf{u} \, dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{p}_N \cdot \mathbf{u} \, d\gamma - \int_{\Gamma_D} \mathbf{u}_D \cdot (\phi^\alpha(\theta) \mathbf{S}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu}) \, d\gamma,$$

$$f_1(\theta) = \int_D \phi(\theta) \, dx - c_1.$$

問題 5.2 (平均コンプライアンス最小化問題)

f_0 と f_1 に対して,

$$\min_{(\theta, \mathbf{u} - \mathbf{u}_D) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S}(\mathbf{u}_D)} \{ f_0(\theta, \mathbf{u}) \mid f_1(\theta) \leq 0, \text{ 問題 5.1} \}$$

を満たす θ を求めよ．

■ 評価関数の θ 微分 [1, 8.8 節]

$f_0(\theta, \mathbf{u})$ の Lagrange 関数を

$$\mathcal{L}_0(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0) = f_0(\theta, \mathbf{u}) + \mathcal{L}_S(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)$$

とおく. ただし, $\mathcal{L}_S$ は問題 5.1 の Lagrange 関数で次のようにおく.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0) &= \int_D \{ -\phi^\alpha(\theta) \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}_0) + \mathbf{b}(\theta) \cdot \mathbf{u} \} dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{p}_N \cdot \mathbf{u} d\gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_D} \{ (\mathbf{u} - \mathbf{u}_D) \cdot (\phi^\alpha(\theta) \mathbf{S}(\mathbf{v}_0) \boldsymbol{\nu}) + \mathbf{v}_0 \cdot (\phi^\alpha(\theta) \mathbf{S}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu}) \} d\gamma \end{aligned}$$

$\mathcal{L}_0$ の Fréchet 微分に対して、次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}'_0(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\vartheta, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}_0] \\
 &= \boxed{\mathcal{L}_{0\theta}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\vartheta]} \\
 &+ \mathcal{L}_{0\mathbf{u}}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\hat{\mathbf{u}}] \quad (= 0 \Leftarrow \boxed{\mathcal{L}_0(\theta, \mathbf{v}_0, \hat{\mathbf{u}}) = 0 \ \forall \hat{\mathbf{u}} \in U}) \\
 &+ \mathcal{L}_{0\mathbf{v}_0}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\hat{\mathbf{v}}_0] \quad (= 0 \Leftarrow \boxed{\mathcal{L}_0(\theta, \mathbf{u}, \hat{\mathbf{v}}_0) = 0 \ \forall \hat{\mathbf{v}}_0 \in U}) \\
 &= \int_D \{ \mathbf{b}' \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}_0) - \alpha \phi^{\alpha-1} \phi' \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}_0) \} \vartheta \, dx \\
 &= \langle g_0, \vartheta \rangle \quad \forall (\vartheta, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}_0) \in X \times U \times U
 \end{aligned}$$

一方, $f_1(\theta)$ に関しては、次が成り立つ.

$$f'_1(\theta)[\vartheta] = \int_D \phi' \vartheta \, dx = \langle g_1, \vartheta \rangle \quad \forall \vartheta \in X$$

■ 評価関数の θ Hesse 形式

b は θ の関数ではないと仮定する. $(\theta, \mathbf{u})$ を設計変数とみなし, その許容集合と許容方向集合を

$$S = \{(\theta, \mathbf{u}) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S} \mid \mathcal{L}_S(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \text{ for all } \mathbf{v} \in U\},$$

$$T_S(\theta, \mathbf{u}) = \{(\vartheta, \hat{\mathbf{v}}) \in X \times U \mid \mathcal{L}_{S\theta\mathbf{u}}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v})[\vartheta, \hat{\mathbf{v}}] = 0 \text{ for all } \mathbf{v} \in U\}$$

とおく. このとき, $\mathcal{L}_0$ の設計変数 $(\theta, \mathbf{u})$ に対する 2 階 Fréchet 偏微分は

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{0(\theta, \mathbf{u})(\theta, \mathbf{u})}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[(\vartheta_1, \hat{\mathbf{v}}_1), (\vartheta_2, \hat{\mathbf{v}}_2)] \\ &= \mathcal{L}_{0\theta\theta}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\vartheta_1, \vartheta_2] + \mathcal{L}_{0\theta\mathbf{u}}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\vartheta_1, \hat{\mathbf{v}}_2] \\ & \quad + \mathcal{L}_{0\theta\mathbf{u}}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\vartheta_2, \hat{\mathbf{v}}_1] + \mathcal{L}_{0\mathbf{u}\mathbf{u}}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2] \\ & \quad \forall (\vartheta_1, \hat{\mathbf{v}}_1), (\vartheta_2, \hat{\mathbf{v}}_2) \in T_S(\theta, \mathbf{u}) \end{aligned} \tag{5.1}$$

となる.

式 (5.1) 右辺の各項は,

$$\mathcal{L}_{0\theta\theta}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\vartheta_1, \vartheta_2] = \int_D -(\phi^\alpha(\theta))'' \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}_0) \vartheta_1 \vartheta_2 \, dx, \quad (5.2)$$

$$\mathcal{L}_{0\theta\mathbf{u}}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\vartheta_1, \hat{\mathbf{v}}_2] = \int_D -(\phi^\alpha(\theta))' \mathbf{S}(\hat{\mathbf{v}}_2) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}_0) \vartheta_1 \, dx, \quad (5.3)$$

$$\mathcal{L}_{0\theta\mathbf{u}}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\vartheta_2, \hat{\mathbf{v}}_1] = \int_D -(\phi^\alpha(\theta))' \mathbf{S}(\hat{\mathbf{v}}_1) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}_0) \vartheta_2 \, dx, \quad (5.4)$$

$$\mathcal{L}_{0\mathbf{u}\mathbf{u}}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\hat{\mathbf{v}}_1, \hat{\mathbf{v}}_2] = 0 \quad (5.5)$$

となる. ただし, $\mathbf{u} - \mathbf{u}_D$, $\mathbf{v}_0 - \mathbf{u}_D$, $\hat{\mathbf{v}}_1$ および $\hat{\mathbf{v}}_2$ は Γ_D 上で $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$ となることを用いた.

一方, $j \in \{1, 2\}$ に対して,

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}_{S\theta\mathbf{u}}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}) [\vartheta_j, \hat{\mathbf{v}}_j] \\
 &= \int_D \{ -(\phi^\alpha(\theta))' \vartheta_j \mathbf{S}(\mathbf{v}) - \phi^\alpha(\theta) \mathbf{S}(\hat{\mathbf{v}}_j) \} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) \, dx \\
 &= 0 \quad \forall (\vartheta_j, \hat{\mathbf{v}}_j) \in T_S(\theta, \mathbf{u})
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

となる. ただし, $\mathbf{v}_0$ と $\hat{\mathbf{v}}_j$ の Dirichlet 境界条件が使われた. 式 (5.6) より,

$$\mathbf{S}(\hat{\mathbf{v}}_j) = -\frac{(\phi^\alpha(\theta))'}{\phi^\alpha(\theta)} \vartheta_j \mathbf{S}(\mathbf{u}) \quad \text{in } D \tag{5.7}$$

を得る. そこで, 式 (5.7) の $\hat{\mathbf{v}}_j$ を式 (5.4) の $\hat{\mathbf{v}}_1$ と式 (5.3) の $\hat{\mathbf{v}}_2$ に代入すれば, 次を得る.

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}_{0\theta\mathbf{u}}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0) [\vartheta_1, \hat{\mathbf{v}}_2] = \mathcal{L}_{0\theta\mathbf{u}}(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0) [\vartheta_2, \hat{\mathbf{v}}_1] \\
 &= \int_D \frac{(\phi^\alpha(\theta))'^2}{\phi^\alpha(\theta)} \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}_0) \vartheta_1 \vartheta_2 \, dx
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

f_0 の 2 階 θ 微分は, 式 (5.8) と式 (5.2) を式 (5.1) に代入することにより,

$$\begin{aligned} h_0(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\vartheta_1, \vartheta_2] &= \int_D \left\{ 2 \frac{(\phi^\alpha(\theta))'^2}{\phi^\alpha(\theta)} - (\phi^\alpha(\theta))'' \right\} \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}_0) \vartheta_1 \vartheta_2 \, dx \\ &= \int_D \beta(\alpha, \theta) \mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}_0) \vartheta_1 \vartheta_2 \, dx \end{aligned}$$

となる. ただし, $\beta(\alpha, \theta)$ は

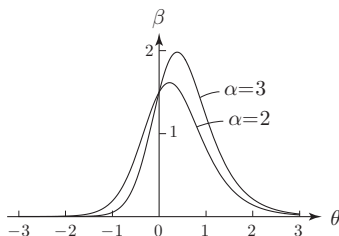
$$\begin{aligned} \beta(\alpha, \theta) &= \alpha(\alpha+1) \left(\frac{1}{2} \tanh \theta + \frac{1}{2} \right)^{\alpha-2} \left(\frac{\operatorname{sech}^2 \theta}{2} \right)^2 \\ &\quad - \alpha \left(\frac{1}{2} \tanh \theta + \frac{1}{2} \right)^{\alpha-1} (-\operatorname{sech}^2 \theta \tanh \theta) \end{aligned}$$

となる. 図 5.2 (a) より, $\beta(\alpha, \theta) > 0$ が確認される. さらに, 自己随伴関係を用いれば, $\mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}_0) > 0$ となり, $h_0(\theta, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\cdot, \cdot]$ は X 上の強圧的かつ有界なある双 1 次形式となる.

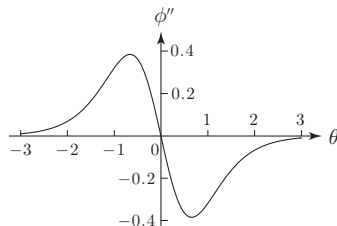
一方, $f_1(\theta)$ の 2 階 θ 微分は,

$$h_1(\theta)[\vartheta_1, \vartheta_2] = \int_D \phi''(\theta) \vartheta_1 \vartheta_2 \, dx = \int_D -\operatorname{sech}^2 \theta \tanh \theta \vartheta_1 \vartheta_2 \, dx$$

となる. 図 5.2 (b) より, $h_1(\theta)[\cdot, \cdot]$ は強圧的にはならない.



(a) $\beta(\alpha, \theta)$



(b) $\phi''(\theta)$

図 5.2: 評価関数の 2 階 θ 微分における係数関数

■ H^1 勾配法と H^1 Newton 法 [1, 8.6 節]

問題 5.3 (θ 型 H^1 勾配法)

X 上の有界かつ強圧的な双 1 次形式 $a_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ と $g_i(\theta_k) \in X'$ が与えられたとき,

$$a_X(\vartheta_{gi}, \psi) = -\langle g_i(\theta_k), \psi \rangle \quad \forall \psi \in X$$

を満たす $\vartheta_{gi} \in X$ を求めよ.

例えば,

$$a_X(\vartheta, \psi) = \int_D (\nabla \vartheta \cdot \nabla \psi + c_D \vartheta \psi) \, dx$$

とおく. アルゴリズムは, 図 2.6 が使われる.

定理 5.5 (θ 型 H^1 勾配法 [1, 定理 8.4.2, 定理 8.5.5])

$\theta \in \mathcal{D}$ に対して, 問題 5.1 の解 u が $\mathcal{S}(u_D)$ に入るとき, $i \in \{0, 1\}$ に対して, $g_i \in L^{q_R}(D; \mathbb{R})$ となる. さらに, 問題 5.4 の弱解 ϑ_{gi} は一意に存在し, その解 ϑ_{gi} は $D \setminus \bar{B}$ 上で, $W^{1,\infty}$ 級となる. また, ϑ_{gi} は $\tilde{f}_i(\theta)$ の降下方向を向いている.

(証明) Hölder の不等式などにより, $g_i \in L^{q_R}(D; \mathbb{R}) \subset X'$ を得る. さらに, Lax-Milgram の定理より, ϑ_{gi} は一意に存在し, ϑ_{gi} は $D \setminus \bar{B}$ 上で W^{2,q_R} 級を得る. さらに, Sobolev の埋蔵定理より,

$$2 - \frac{d}{q_R} = 1 + \sigma > 1 \quad (\sigma \in (0, 1)) \Rightarrow W^{2,q_R}(D \setminus \bar{B}, \mathbb{R}) \subset W^{1,\infty}(D \setminus \bar{B}, \mathbb{R})$$

が成り立つ. また, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i(\theta + \bar{\epsilon}\vartheta_{gi}) - \tilde{f}_i(\theta) &= \bar{\epsilon} \langle g_i, \vartheta_{gi} \rangle + o(|\bar{\epsilon}|) \\ &= -\bar{\epsilon} a_X(\vartheta_{gi}, \vartheta_{gi}) + o(|\bar{\epsilon}|) \leq -\bar{\epsilon} \alpha_X \|\vartheta_{gi}\|_X^2 + o(|\bar{\epsilon}|) \end{aligned}$$

問題 5.6 (θ 型 H^1 Newton 法)

試行点 $\theta_k \in X$ において, $\lambda_k \in \mathbb{R}^{|I_A|}$ は KKT 条件を満たすとする. また,

$$h_{\mathcal{L}}(\theta_k)[\vartheta_1, \vartheta_2] = h_0(\theta_k)[\vartheta_1, \vartheta_2] + \sum_{i \in I_A(\theta_k)} \lambda_{ik} h_i(\theta_k)[\vartheta_1, \vartheta_2] \quad \forall \vartheta_1, \vartheta_2 \in X$$

とおく. $a_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ を X 上の有界かつ強圧的な双 1 次形式とすると,

$$c_h h_{\mathcal{L}}(\theta_k)[\vartheta_{gi}, \psi] + c_a a_X(\vartheta_{gi}, \psi) = -\langle g_i(\theta_k), \psi \rangle \quad \forall \psi \in X$$

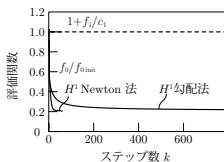
を満たす $\varphi_{gi} \in X$ を求めよ.

図 2.7 のアルゴリズムが使われる.

■ 数値例



(a) 初期密度と境界条件



(b) 評価関数の履歴



(c) H^1 勾配法による最適密度



(d) H^1 Newton 法による最適密度

図 5.4: 2次元線形弾性体の密度型位相最適化問題に対する数値例

§6 線形弾性体の形状最適化 [1, 第9章]

■ 線形空間と許容集合 [1, 9.1 節]

設計変数を $\phi \in \mathcal{D} \subset X$ とおく. ただし, 線形空間 X と許容集合 $\mathcal{D}$ を

$$\begin{aligned} X &= \{ \phi \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d) \mid \phi = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \bar{\Omega}_{C0} \}, \\ \mathcal{D} &= \{ \phi \in X \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d) \mid \text{全単射の条件} \}. \end{aligned}$$

とおく. ただし, $\bar{\Omega}_{C0} \subset \bar{\Omega}_0$ は設計上の固定領域あるいは境界とする.
状態変数 (状態決定問題の解) u の線形空間と許容集合を

$$\begin{aligned} U &= \{ u \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d) \mid u = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \Gamma_D(\phi) \}, \\ U(u_D) &= \{ u \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d) \mid u = u_D \text{ on } \Gamma_D(\phi) \}, \\ \mathcal{S} &= U \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d), \\ \mathcal{S}(u_D) &= U(u_D) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d) \end{aligned}$$

とおく.

■ 状態決定問題 (等式制約)[1, 9.11 節]

問題 6.1 (線形弾性問題)

$\phi \in \mathcal{D}$, $\mathbf{b}(\phi)$, $\mathbf{p}_N(\phi)$, $\mathbf{u}_D(\phi)$ および $\mathbf{C}(\phi)$ に対して,

$$\begin{aligned} -\nabla^T \mathbf{S}(\phi, \mathbf{u}) &= \mathbf{b}^T(\phi) \quad \text{in } \Omega(\phi), \\ \mathbf{S}(\phi, \mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} &= \mathbf{p}_N(\phi) \quad \text{on } \Gamma_p(\phi), \\ \mathbf{S}(\phi, \mathbf{u}) \boldsymbol{\nu} &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{on } \Gamma_N(\phi) \setminus \bar{\Gamma}_p(\phi), \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_D(\phi) \quad \text{on } \Gamma_D(\phi) \end{aligned}$$

を満たす $\mathbf{u} \in \mathcal{S}(\mathbf{u}_D)$ を求めよ.

■ 評価関数 [1, 9.11 節]

平均コンプライアンスと領域の大きさに対する制約関数を次のようにおく.

$$f_0(\phi, \mathbf{u}) = \int_{\Omega(\phi)} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, dx + \int_{\Gamma_N(\phi)} \mathbf{p}_N \cdot \mathbf{u} \, d\gamma - \int_{\Gamma_D(\phi)} \mathbf{u}_D \cdot (\mathbf{S}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu}) \, d\gamma,$$

$$f_1(\phi) = \int_{\Omega(\phi)} dx - c_1.$$

問題 6.2 (平均コンプライアンス最小化問題)

f_0 と f_1 に対して,

$$\min_{(\phi, \mathbf{u} - \mathbf{u}_D) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S}} \{ f_0(\phi, \mathbf{u}) \mid f_1(\phi) \leq 0, \text{ 問題 6.1} \}$$

を満たす $\Omega(\phi)$ を求めよ.

■ 評価関数の形状微分 [1, 9.11 節]

$f_0(\phi, \mathbf{u})$ の Lagrange 関数を

$$\mathcal{L}_0(\phi, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0) = f_0(\phi, \mathbf{u}) + \mathcal{L}_S(\phi, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)$$

とおく. ただし, $\mathcal{L}_S$ は問題 6.1 の Lagrange 関数で次のようにおく.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S(\phi, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = & \int_{\Omega(\phi)} (-\mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{v}) + \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}) \, dx + \int_{\Gamma_p(\phi)} \mathbf{p}_N \cdot \mathbf{v} \, d\gamma \\ & + \int_{\Gamma_D(\phi)} \{(\mathbf{u} - \mathbf{u}_D) \cdot (\mathbf{S}(\mathbf{v}) \boldsymbol{\nu}) + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{S}(\mathbf{u}) \boldsymbol{\nu})\} \, d\gamma \end{aligned}$$

$b(\phi)$, $p_N(\phi)$, $u_D(\phi)$ および $C(\phi)$ は物質固定であると仮定する. このとき,

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}'_0(\phi, u, v_0)[\varphi, \hat{u}, \hat{v}_0] \\
 &= \boxed{\mathcal{L}_{0\phi'}(\phi, u, v_0)[\varphi]} \\
 &+ \mathcal{L}_{0u}(\phi, u, v_0)[\hat{u}] \quad (= 0 \Leftarrow \boxed{\mathcal{L}_0(\phi, v_0, \hat{u}) = 0 \ \forall \hat{u} \in U}) \\
 &+ \mathcal{L}_{0v_0}(\phi, u, v_0)[\hat{v}_0] \quad (= 0 \Leftarrow \boxed{\mathcal{L}_0(\phi, u, \hat{v}_0) = 0 \ \forall \hat{v}_0 \in U}) \\
 &= \langle g_0, \varphi \rangle \quad (\Leftarrow \boxed{[1, \text{命題 9.3.4 と命題 9.3.7}]}) \\
 &= \int_{\Omega(\phi)} (G_{\Omega 0} \cdot \nabla \varphi^T + g_{\Omega 0} \nabla \cdot \varphi) \, dx \\
 &+ \int_{\Gamma_p(\phi)} g_{p0} \cdot \varphi \, d\gamma + \int_{\partial\Gamma_p(\phi) \cup \Theta(\phi)} g_{\partial p 0} \cdot \varphi \, d\varsigma \\
 &\quad \forall (\varphi, \hat{u}, \hat{v}_0) \in \Xi \times U \times U
 \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし,

$$\begin{aligned}G_{\Omega 0} &= 2\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u})\left(\nabla \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}, \\g_{\Omega 0} &= -\boldsymbol{S}(\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{u})+2 \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{u}, \\g_{p 0} &= 2 \kappa\left(\boldsymbol{p}_{\mathrm{N}} \cdot \boldsymbol{u}\right) \nu, \\g_{\partial p 0} &= 2\left(\boldsymbol{p}_{\mathrm{N}} \cdot \boldsymbol{u}\right) \tau\end{aligned}$$

である.

あるいは, b, p_N, u_D および C は空間固定の関数であると仮定して, u と v_0 は $q_R > d$ に対して $W^{2,2q_R}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ と仮定とき,

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{0\phi^*}(\phi, u, v_0)[\varphi] \\ &= \langle \bar{g}_0, \varphi \rangle \quad (\Leftarrow \boxed{[1, \text{命題 9.3.9 と命題 9.3.12}]}) \\ &= \int_{\partial\Omega(\phi)} \bar{g}_{\partial\Omega 0} \cdot \varphi \, d\gamma + \int_{\Gamma_P(\phi)} \bar{g}_{p0} \cdot \varphi \, d\gamma + \int_{\partial\Gamma_P(\phi) \cup \Theta(\phi)} \bar{g}_{\partial p 0} \cdot \varphi \, d\varsigma \\ &\quad + \int_{\Gamma_D(\phi)} \bar{g}_{D0} \cdot \varphi \, d\gamma \end{aligned}$$

のようにかかる. ここで,

$$\bar{g}_{\partial\Omega 0} = (-S(u) \cdot E(u) + 2b \cdot u) \nu,$$

$$\bar{g}_{p0} = 2(\partial_\nu + \kappa)(p_N \cdot u) \nu,$$

$$\bar{g}_{\partial p 0} = 2(p_N \cdot u) \tau,$$

$$\bar{g}_{D0} = 2\{\partial_\nu(u - u_D) \cdot (S(u) \nu)\} \nu.$$

一方, $f_1(\phi)$ の形状微分は,

$$f'_1(\phi)[\varphi] = \langle \mathbf{g}_1, \varphi \rangle = \int_{\Omega(\phi)} \nabla \cdot \varphi \, dx$$

となる. あるいは,

$$f'_1(\phi)[\varphi] = \langle \bar{\mathbf{g}}_1, \varphi \rangle = \int_{\partial\Omega(\phi)} \boldsymbol{\nu} \cdot \varphi \, d\gamma$$

となる.

■ 評価関数の形状 Hesse 形式 [1, 9.11 節]

$b = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$ を仮定する．設計変数 (ϕ, u) を (ϕ, u) の許容集合と許容方向集合を

$$S = \{(\phi, u) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S} \mid \mathcal{L}_S(\phi, u, v) = 0 \text{ for all } v \in U\},$$

$$T_S(\phi, u) = \{(\varphi, \hat{v}) \in X \times U \mid \mathcal{L}_{S\phi u}(\phi, u, v)[\varphi, \hat{v}] = 0 \text{ for all } v \in U\}$$

とおく．このとき， $\mathcal{L}_0$ の (ϕ, u) に対する 2 階 Fréchet 偏微分は，

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{0(\phi', u)(\phi', u)}(\phi, u, v_0)[(\varphi_1, \hat{v}_1), (\varphi_2, \hat{v}_2)] \\ &= (\mathcal{L}_{0\phi'}(\phi, u, v_0)[\varphi_1] + \mathcal{L}_{0u}(\phi, u, v_0)[\hat{v}_1])_{\phi}[\varphi_2] \\ & \quad + (\mathcal{L}_{0\phi'}(\phi, u, v_0)[\varphi_1] + \mathcal{L}_{0u}(\phi, u, v_0)[\hat{v}_1])_u[\hat{v}_2] \\ &= \mathcal{L}_{0\phi'\phi'}(\phi, u, v_0)[\varphi_1, \varphi_2] + \mathcal{L}_{0\phi'u}(\phi, u, v_0)[\varphi_1, \hat{v}_2] \\ & \quad + \mathcal{L}_{0\phi'u}(\phi, u, v_0)[\varphi_2, \hat{v}_1] + \mathcal{L}_{0uu}(\phi, u, v_0)[\hat{v}_1, \hat{v}_2] \\ & \quad \forall (\varphi_1, \hat{v}_1), (\varphi_2, \hat{v}_2) \in T_S(\phi, u) \end{aligned} \tag{6.1}$$

となる．式 (6.1) の右辺第 1 項の計算は省略する．

式 (6.1) の右辺第 2 項は,

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}_{0\phi'u}(\phi, u, v_0)[\varphi_1, \hat{v}_2] \\
 &= \int_{\Omega(\phi)} \left[\left\{ S(\hat{v}_2) (\nabla v_0^T)^T + S(v_0) (\nabla \hat{v}_2^T)^T \right\} \cdot \nabla \varphi_1^T \right. \\
 & \quad \left. - (S(\hat{v}_2) \cdot E(v_0)) \nabla \cdot \varphi_1 \right] dx
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

となる.

一方, $j \in \{1, 2\}$ に対して,

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}_{S\phi'u}(\phi, u, v)[\varphi_j, \hat{v}_j] \\
 &= \int_{\Omega(\phi)} \left\{ S(u) \cdot (\nabla \varphi_j^T \nabla v^T)^s + S(v) \cdot (\nabla \varphi_j^T \nabla u^T)^s \right. \\
 & \quad \left. - (S(u) \cdot E(v)) \nabla \cdot \varphi_j - S(\hat{v}_j) \cdot E(v) \right\} dx \\
 &= \int_{\Omega(\phi)} \left[\left\{ (\nabla \varphi_j^T)^T S(u) + C(\nabla \varphi_j^T \nabla u^T)^s - S(u) \nabla \cdot \varphi_j \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - S(\hat{v}_j) \right\} (\nabla v^T)^T \right] \cdot I \, dx \\
 &= 0 \quad \forall (\varphi_j, \hat{v}_j) \in T_S(\phi, u)
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

となる. ただし, v と $\hat{v}_j$ の Dirichlet 境界条件が使われた.

任意の $v \in U$ に対して式 (6.3) が成り立つことから,

$$\begin{aligned} S(\hat{v}_j) (\nabla v^T)^T \\ = \left\{ (\nabla \varphi_j^T)^T S(u) + C (\nabla \varphi_j^T \nabla u^T)^s - \nabla \cdot \varphi_j S(u) \right\} (\nabla v^T)^T \end{aligned} \quad (6.4)$$

が得られる. また, 式 (6.3) は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{S\phi'u}(\phi, u, v) [\varphi_j, \hat{v}_j] \\ = \int_{\Omega(\phi)} \left[\nabla v^T S(u) \nabla \varphi_j^T \right. \\ \left. + S(v) \left\{ (\nabla u^T)^T \left((\nabla \varphi_j^T)^T - \nabla \cdot \varphi_j \right) - (\nabla \hat{v}_j^T)^T \right\} \right] \cdot I \, dx \\ = 0 \end{aligned}$$

ともかける.

そこで,

$$\begin{aligned}
 & S(v) (\nabla \hat{v}_j^T)^T \\
 &= \nabla v^T S(u) \nabla \varphi_j^T + S(v) (\nabla u^T)^T \left\{ (\nabla \varphi_j^T)^T - \nabla \cdot \varphi_j \right\} \quad (6.5)
 \end{aligned}$$

を得る. 式 (6.2) に式 (6.4) と式 (6.5) を代入すれば, 式 (6.1) の右辺第 2 項が計算される. 同様に, 式 (6.1) の右辺第 3 項は, 右辺第 2 項の結果において φ_1 と φ_2 をいれかえたものとなる. 式 (6.1) の右辺第 4 項は 0 となる.

以上の結果に加えて、自己随伴関係と

$$h_0(\phi, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\varphi_1, \varphi_2] = h_0(\phi, \mathbf{u}, \mathbf{v}_0)[\varphi_2, \varphi_1]$$

が成り立つことを用いれば、 f_0 の形状 Hesse 形式は次のように得られる。

$$\begin{aligned} & h_0(\phi, \mathbf{u}, \mathbf{u})[\varphi_1, \varphi_2] \\ &= \int_{\Omega(\phi)} \left[\mathbf{S}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{u}) \left\{ (\nabla \varphi_2^T)^T \cdot \nabla \varphi_1^T + (\nabla \cdot \varphi_2)(\nabla \cdot \varphi_1) \right\} \right. \\ & \quad + (\nabla \mathbf{u}^T \mathbf{S}(\mathbf{u})) \cdot \left\{ \nabla \varphi_1^T (\nabla \varphi_2^T)^T + \nabla \varphi_2^T (\nabla \varphi_1^T)^T \right\} \\ & \quad \left. - 2(\mathbf{S}(\mathbf{u}) \mathbf{E}(\mathbf{u})) \cdot \left\{ \nabla \varphi_2^T (\nabla \cdot \varphi_1) + \nabla \varphi_1^T (\nabla \cdot \varphi_2) \right\} \right] dx \\ & \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in X \end{aligned}$$

一方, $f_1(\phi)$ の形状 Hesse 形式は次のようになる.

$$\begin{aligned} h_1(\phi)[\varphi_1, \varphi_2] \\ = \int_{\Omega(\phi)} \left\{ -(\nabla \varphi_2^T)^T \cdot \nabla \varphi_1^T + (\nabla \cdot \varphi_2)(\nabla \cdot \varphi_1) \right\} dx \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in X \end{aligned}$$

■ H^1 勾配法と H^1 Newton 法 [1, 9.8 節]

問題 6.3 (領域変動型 H^1 勾配法)

X 上の有界かつ強圧的な双 1 次形式 $a_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ と $g_i \in X'$ が与えられたとき,

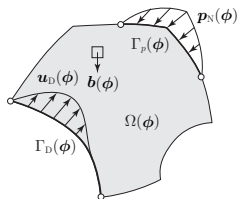
$$a_X(\varphi_{g_i}, \psi) = -\langle g_i, \psi \rangle \quad \forall \psi \in X$$

を満たす $\varphi_{g_i} \in X$ を求めよ.

例えば,

$$a_X(\varphi, \psi) = \int_{\Omega(\phi)} \{(\nabla \varphi^T) \cdot (\nabla \psi^T) + c_\Omega \varphi \cdot \psi\} dx$$

とおく. アルゴリズムは, 図 2.6 が使われる.

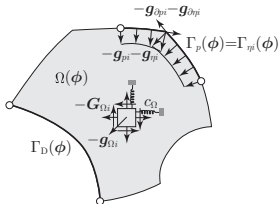


状態決定問題

$$(b, p, u_D) \rightarrow u$$

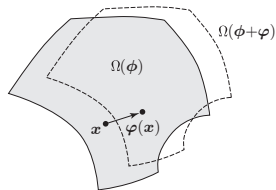
随伴問題

$$(\zeta_{iu}, \eta_{iu}) \mapsto v_i$$



H^1 勾配法

$$g_i \rightarrow \varphi_{gi}$$



形状更新

$$\Omega(\phi) \rightarrow \Omega(\phi + \epsilon \varphi_{gi})$$

図 6.1: H^1 勾配法による形状更新

問題 6.4 (領域変動型 H^1 Newton 法)

試行点 $\phi_k \in X$ において, $\lambda_k \in \mathbb{R}^{|I_A|}$ は KKT 条件を満たすとする. また,

$$h_{\mathcal{L}}(\phi_k)[\varphi_1, \varphi_2] = h_0(\phi_k)[\varphi_1, \varphi_2] + \sum_{i \in I_A(\mathbf{x}_k)} \lambda_{ik} h_i(\phi_k)[\varphi_1, \varphi_2]$$

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in X$$

とおく. $a_X : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ を X 上の有界かつ強圧的な双 1 次形式とする. このとき,

$$c_h h_{\mathcal{L}}(\phi_k)[\varphi_{gi}, \psi] + c_a a_X(\varphi_{gi}, \psi) = -\langle g_i(\phi_k), \psi \rangle \quad \forall \psi \in X$$

を満たす $\varphi_{gi} \in X$ を求めよ.

図 2.7 のアルゴリズムが使われる.

■ 数値例

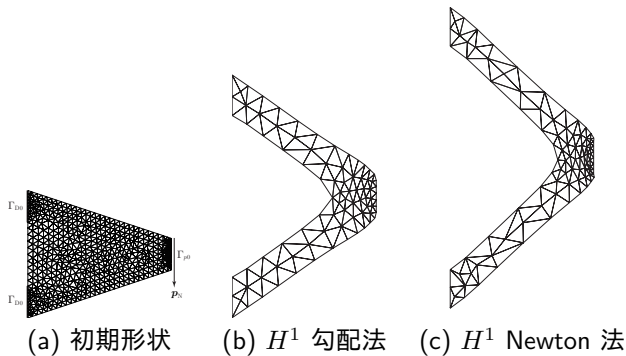


図 6.2: 2次元線形弾性体に対する数値結果: 形状比較

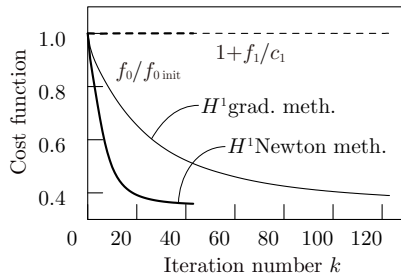


図 6.3: 2次元線形弾性体に対する数値結果: 評価関数の履歴

§7 リンク機構の形状最適化 [3]

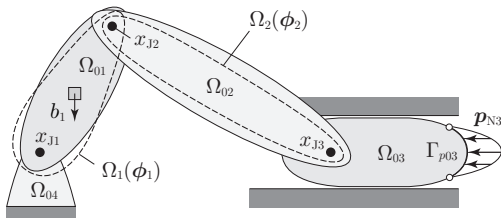


図 7.1: $t = 0$ におけるリンク結合された剛体の領域変動

■ 設計変数

- $\mathcal{L} = \{1, 2, \dots, |\mathcal{L}|\}$: リンクに付けられた番号の集合
- $\Omega_{0l} \subset \mathbb{R}^d$: リンク $l \in \mathcal{L}$ の時刻 $t = 0$ のときの初期領域
- $\Omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{\Omega_{0l}\}_{l \in \mathcal{L}}, \partial\Omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{\partial\Omega_{0l}\}_{l \in \mathcal{L}}$
- $X = \{\phi \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d) \mid \phi = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \bar{\Omega}_{C0}\}$
- $\mathcal{D} = \{\phi \in X \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d) \mid \text{全単射の条件}\}$
- $\phi_l \in \mathcal{D}$ に対して, $\Omega_l(\phi_l) = \{(i + \phi_l)(x) \mid x \in \Omega_{0l}\}$
- $\phi \stackrel{\text{def}}{=} \{\phi_l\}_{l \in \mathcal{L}} \in \mathcal{D}^{|\mathcal{L}|}, \Omega(\phi) \stackrel{\text{def}}{=} \{\Omega_l(\phi_l)\}_{l \in \mathcal{L}}$

■ 状態変数

- $\mathbf{x}_{Gl} : (0, t_T) \rightarrow \mathbb{R}^d : \Omega_l(\phi)$ の重心の位置
- $\theta_l : (0, t_T) \rightarrow \mathbb{R} : \mathbf{x}_{Gl}$ 周りの回転
- $\mathbf{q}_l(t) = \left((\mathbf{x}_{Gl}(t) - \mathbf{x}_{Gl}(0))^T, \theta_l(t) \right)^T : (0, t_T) \rightarrow \mathbb{R}^{d_F} : \Omega_l(\phi)$ の剛体運動
($d_F = 3$)
- $\mathbf{q} = \left(\mathbf{q}_1^T, \dots, \mathbf{q}_{|\mathcal{L}|}^T \right)^T : (0, t_T) \rightarrow \mathbb{R}^{d_F|\mathcal{L}|} : \text{全体系の剛体運動}$

$$Q = \left\{ \mathbf{q} \in H^1 \left((0, t_T); \mathbb{R}^{d_F|\mathcal{L}|} \right) \mid \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}(0) \\ \mathbf{q}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \right\},$$

$$Q_0 = \left\{ \mathbf{q} \in H^1 \left((0, t_T); \mathbb{R}^{d_F|\mathcal{L}|} \right) \mid \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}(0) \\ \mathbf{q}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$Q_T(\mathbf{q}) = \left\{ \mathbf{r} \in H^1 \left((0, t_T); \mathbb{R}^{d_F|\mathcal{L}|} \right) \mid \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{r}}(t_T) \\ \mathbf{r}(t_T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t_T) \\ \mathbf{q}(t_T) \end{pmatrix} \right\}$$

- $\mathbf{u}_l(\mathbf{q}_l, \mathbf{x}) = \mathbf{x}_{Gl}(t) - \mathbf{x}_{Gl}(0) + \theta_l(t) \mathbf{e}_3 \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{Gl}(0))$: $\mathbf{q}_l$ から $\Omega_l(\phi_l)$ 上の任意の点 $\mathbf{x}$ の変位
- $\tilde{\Omega}_l(\phi_l, \mathbf{q}_l) = \{\mathbf{x} + \mathbf{u}_l(\mathbf{q}_l, \mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \Omega_l(\phi_l)\}$: 剛体運動する領域
- $\tilde{\Gamma}_{pl}(\mathbf{q}_l) = \{\mathbf{x} + \mathbf{u}_l(\mathbf{q}_l, \mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \partial\Omega_{0l} \cap \Gamma_{p0}\}$: 剛体運動する非同次 Neumann 境界

■ 運動制約

- $\mathcal{J} = \{1, 2, \dots, |\mathcal{J}|\}$: リンク結合制約に付けられた番号の集合
- $i \in \mathcal{J}$ に対して, $\mathbf{u}_l(\mathbf{q}_l, \mathbf{x}_{Jil}) - \mathbf{u}_m(\mathbf{q}_m, \mathbf{x}_{Jim}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$: リンク結合制約
- $\mathcal{T} = \{1, 2, \dots, |\mathcal{T}|\}$: 並進運動制約に付けられた番号の集合
- $i \in \mathcal{T}$ に対して, $u_{Til}(\mathbf{q}_l, \mathbf{x}_{Gl}) = (\mathbf{x}_{Glj}(t) - \mathbf{x}_{Glj}(0)) \cdot \mathbf{e}_{Ti} = 0$: 並進運動制約
- $\mathcal{R} = \{1, 2, \dots, |\mathcal{R}|\}$: 回転運動制約に付けられた番号の集合
- $i \in \mathcal{R}$ に対して, $\theta_l(t) = 0$: 回転運動制約
- $\psi(\mathbf{q}) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^{|\mathcal{C}|}}$ ($\mathcal{C} \stackrel{\text{def}}{=} (\{1, 2\} \times \mathcal{J}) \cup \mathcal{T} \cup \mathcal{R}$) : すべての運動制約

■ 一般化質量と一般化外力

リンク機構の一般化質量

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\boldsymbol{\phi}) = & \text{diag}(m_1(\boldsymbol{\phi}_1), m_1(\boldsymbol{\phi}_1), j_{G1}(\boldsymbol{\phi}_1), \\ & \dots, m_{|\mathcal{L}|}(\boldsymbol{\phi}_{|\mathcal{L}|}), m_{|\mathcal{L}|}(\boldsymbol{\phi}_{|\mathcal{L}|}), j_{G|\mathcal{L}|}(\boldsymbol{\phi}_{|\mathcal{L}|})) \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned} m_l(\boldsymbol{\phi}_l) &= \int_{\Omega_l(\boldsymbol{\phi}_l)} \rho_l \, dx, \\ j_{Gl}(\boldsymbol{\phi}_l) &= \int_{\Omega_l(\boldsymbol{\phi}_l)} \rho_l \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{Gl}(0)\|_{\mathbb{R}^d}^2 \, dx \end{aligned}$$

リンク $l \in \mathcal{L}$ に作用する体積力 $\mathbf{b}_l \in L^2((0, t_T); L^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d))$ と非零の境界力 $\mathbf{p}_{Nl} \in L^2((0, t_T); L^\infty(\Gamma_{p0l}; \mathbb{R}^d))$ に対する一般化外力

$$\mathbf{s}_l = (\mathbf{s}_{Fl}^T, s_{Ml})^T \in \mathbb{R}^{d_F}$$

ただし,

$$s_{Fl} = \int_{\Omega_l(\phi_l)} \mathbf{b}_l(t) \, dx + \int_{\Gamma_{p0l}} \mathbf{p}_{Nl}(t) \, d\gamma,$$

$$s_{Ml} \mathbf{e}_3 = \int_{\Omega_l(\phi_l)} \mathbf{b}_l(t) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{Gl}(t)) \, dx + \int_{\Gamma_{p0l}} \mathbf{p}_{Nl}(t) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{Gl}(t)) \, d\gamma$$

全体系の一般化力

$$\mathbf{s} = (\mathbf{s}_1^T, \dots, \mathbf{s}_{|\mathcal{L}|}^T)^T$$

■ 状態決定問題

問題 7.1 (リンク運動)

$\phi \in \mathcal{D}^{|\mathcal{C}|}$ は与えられたとする. また, $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1 \in \mathbb{R}^{d_F|\mathcal{L}|}$ が与えられたとして,

$$\begin{pmatrix} \psi'(\mathbf{q}_0)[\mathbf{q}_1] \\ \psi(\mathbf{q}_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

を満たすとする. さらに, $\text{rank } \psi_{\mathbf{q}^T}(\mathbf{q}_0) = |\mathcal{C}|$ とする. このとき,

$$\begin{pmatrix} M(\phi) & (\psi_{\mathbf{q}^T}(\mathbf{q}))^T \\ \psi_{\mathbf{q}^T}(\mathbf{q}) & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ -\boldsymbol{\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{s} \\ -\psi''(\mathbf{q})[\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}] \end{pmatrix} \quad \text{in } (0, t_T),$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}}(0) \\ \mathbf{q}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_0 \end{pmatrix}$$

を満たす $(\mathbf{q}^T, \boldsymbol{\mu}^T)^T : (0, t_T) \rightarrow \mathbb{R}^{d_F|\mathcal{L}|+|\mathcal{C}|}$ を求めよ.

問題 7.1 において, μ は, 運動制約に対する Lagrange 乗数で, 運動制約を満たすために作用した制約力を表す. そこで, μ の要素を

$$\mu = \left(\mu_{J1}^T, \dots, \mu_{J|J|}^T, \mu_{T1}^T, \dots, \mu_{T|T|}^T, \mu_{R1}^T, \dots, \mu_{R|R|}^T \right)^T \in E$$

とかくことにする. ここで, 次のようにおく.

$$E = L^2 \left((0, t_T); \mathbb{R}^{|C|} \right)$$

■ 制約力と制約モーメント

- リンク結合力: $x_{Ji} \in \Omega_l(\phi)$ において $\mu_{Ji}: (0, t_T) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x_{Ji} \in \Omega_m(\phi)$ において $-\mu_{Ji}: (0, t_T) \rightarrow \mathbb{R}^2$ (図 7.2 (a))
- 並進運動制約に対する制約力: $x_{Gl} \in \Omega_l(\phi)$ において $\mu_{Ti} e_j$ (図 7.2 (b))
- 回転運動制約に対する制約モーメント: $\mu_{Ri} e_3$ on $x_{Gl} \in \Omega_l(\phi)$ (図 7.2 (b))

問題 7.1 の Lagrange 関数は, $(q, \mu, r, \eta) \in Q_0 \times E \times Q_T(q) \times E$ に対して

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}_S(\phi, q, \mu, r, \eta) \\
 &= \int_0^{t_T} \left(-\ddot{q}^T M(\phi) \dot{r} + \mu^T \psi_{q^T}(q) \dot{r} + \ddot{q}^T (\psi_{q^T}(q))^T \eta + \psi''(q) [\dot{q}, \dot{q}] \cdot \eta \right. \\
 & \quad \left. + \eta^T \psi_{q^T}(q) \dot{q} + \ddot{r}^T (\psi_{q^T}(q))^T \mu + \psi''(q) [\dot{r}, \dot{r}] \cdot \mu + s \cdot \dot{r} \right) dt \\
 & \quad + \frac{1}{2} \dot{q}^T(t_T) M(\phi) \dot{q}(t_T)
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

とおく. また, 次のようにかく.

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}_{Sr, \eta}(\phi, q, \mu, r, \eta) [\hat{r}, \hat{\eta}] \\
 &= \int_0^{t_T} \left(-\ddot{q}^T M(\phi) \dot{\hat{r}} + \mu^T \psi_{q^T}(q) \dot{\hat{r}} + \ddot{q}^T (\psi_{q^T}(q))^T \hat{\eta} + \psi''(q) [\dot{q}, \dot{q}] \cdot \hat{\eta} \right. \\
 & \quad \left. + \hat{\eta}^T \psi_{q^T}(q) \dot{q} + \ddot{\hat{r}}^T (\psi_{q^T}(q))^T \mu + \psi''(q) [\dot{\hat{r}}, \dot{\hat{r}}] \cdot \mu + s \cdot \dot{\hat{r}} \right) dt \\
 & \quad \forall (\hat{r}, \hat{\eta}) \in Q_T(0)
 \end{aligned}$$

問題 7.2 (リンク運動の弱形式)

問題 7.1 の仮定が成り立つとき,

$$\mathcal{L}_{\text{Sr},\eta}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{\eta}) [\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\eta}}] = 0 \quad \forall (\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\eta}}) \in Q_{\text{T}}(\mathbf{0}) \times E$$

を満たす $(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\mu}) \in Q_0 \times E$ を求めよ.

■ 形状最適化問題

$$f_0(\phi, \mathbf{q}, \boldsymbol{\mu}) = - \int_0^{t_T} \mathbf{s} \cdot \dot{\mathbf{q}} \, dt,$$

$$f_1(\phi) = c_1 - \sum_{i \in \mathcal{L}} \int_{\Omega_i(\phi_i)} dx$$

問題 7.3 (体積制約つき外力仕事最大化問題)

次を満たす $\Omega(\phi)$ を求めよ.

$$\min_{(\phi, \mathbf{q}, \boldsymbol{\mu}) \in \mathcal{D} \mid \mathcal{L} \mid \times Q_0 \times E} \{f_0(\phi, \mathbf{q}, \boldsymbol{\mu}) \mid f_1(\phi) \leq 0, \text{ 問題 7.2}\}$$

■ 形状微分

$$\tilde{f}'_0(\phi)[\varphi] = \sum_{l \in \mathcal{L}} \int_{\Omega_l(\phi_l)} g_{M0l} \nabla \cdot \varphi_l \, dx = \sum_{l \in \mathcal{L}} \langle \mathbf{g}_{0l}, \varphi_l \rangle = \langle \mathbf{g}_0, \varphi \rangle$$

あるいは,

$$\tilde{f}'_0(\phi)[\varphi] = \sum_{l \in \mathcal{L}} \int_{\partial\Omega_l(\phi_l)} g_{M0l} \boldsymbol{\nu} \cdot \varphi_l \, d\gamma = \sum_{l \in \mathcal{L}} \langle \bar{\mathbf{g}}_{0l}, \varphi_l \rangle = \langle \bar{\mathbf{g}}_0, \varphi \rangle$$

ただし,

$$g_{M0l} = - \int_0^{t_T} \rho_l \mathbf{u}_l(\ddot{\mathbf{q}}_l) \cdot \mathbf{u}_l(\dot{\mathbf{r}}_{0l}) \, dt$$

■ 数値例

外力 $\mathbf{p}_{N3} = (-0.2, 0)^T \text{ N/mm}$, 初期姿勢 $\theta_1(0) = 60^\circ$, $\theta_2(0) = 150^\circ$, 初期角速度 0.2618 rad/s , 終端時刻 $\theta_1(t_T) = 73^\circ$ (初期形状のとき)

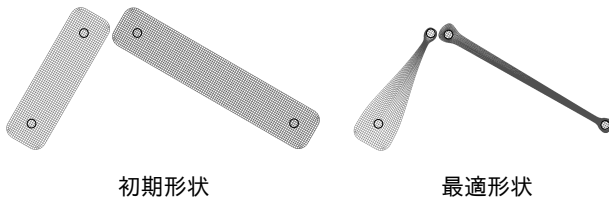


図 7.3: 形状比較

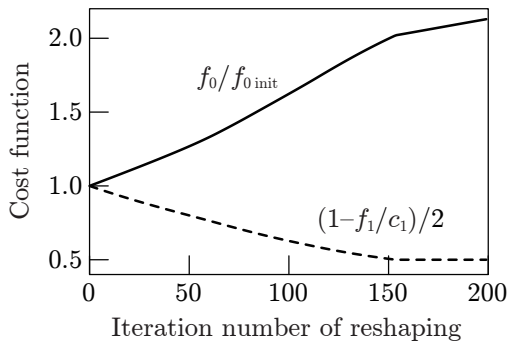


図 7.4: 形状修正に対する評価関数の履歴

§8 ブレーキ鳴き現象に対する形状最適化 [4]

ブレーキ鳴きは、ロータとパッド間の摩擦による自励振動現象である。特に、**複素固有値の実部**が正となる固有振動と考えられてきた。

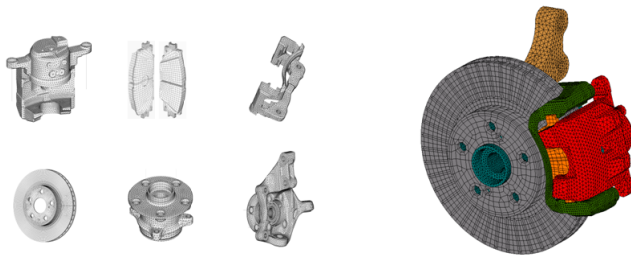
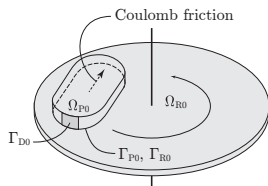
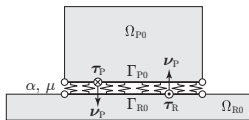


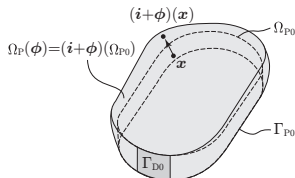
図 8.1: 車両のブレーキ部品



(a) ディスクとパッド



(b) Coulomb 摩擦



(c) パッドの領域変動

図 8.2: ブレーキモデル

■ 状態決定問題

固有振動モード (変位) $\hat{\mathbf{u}}$ の Fourier 変換のための線形空間と許容集合

$$U = \{ \hat{\mathbf{u}} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^d) \mid \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0}_{\mathbb{C}^d} \text{ on } \Gamma_{D0} \},$$

$$\mathcal{S} = U \cap W^{2,2q_R}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^d)$$

問題 8.1 (固有振動)

$\phi \in \mathcal{D}$ が与えられたとき, $k \in \{1, 2, \dots\}$ に対して, 次を満たす $(s_k, \hat{\mathbf{u}}_k) = (s_k, \hat{\mathbf{u}}_R, \hat{\mathbf{u}}_P) \in \mathbb{C} \times \mathcal{S}$ を求めよ.

$$s_k^2 \rho_R \hat{\mathbf{u}}_R - (\nabla \cdot \mathbf{S}(\hat{\mathbf{u}}_R))^T = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{in } \Omega_{R0},$$

$$s_k^2 \rho_P \hat{\mathbf{u}}_P - (\nabla \cdot \mathbf{S}(\hat{\mathbf{u}}_P))^T = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{in } \Omega_P(\phi),$$

$$\mathbf{S}(\hat{\mathbf{u}}_R) \boldsymbol{\nu}_R = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{on } (\partial\Omega_{R0} \setminus \bar{\Gamma}_{R0}),$$

$$\mathbf{S}(\hat{\mathbf{u}}_P) \boldsymbol{\nu}_P = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{on } (\partial\Omega_P(\phi) \setminus \bar{\Gamma}_{P0}),$$

$$\mathbf{S}(\hat{\mathbf{u}}_R) \boldsymbol{\nu}_R = \operatorname{Re}[\alpha \{(\hat{\mathbf{u}}_R - \hat{\mathbf{u}}_P) \cdot \boldsymbol{\nu}_R\} \boldsymbol{\nu}_R] \quad \text{on } \Gamma_{R0},$$

$$\mathbf{S}(\hat{\mathbf{u}}_R) \boldsymbol{\tau}_R = \operatorname{Re}[\mu \alpha \{(\hat{\mathbf{u}}_R - \hat{\mathbf{u}}_P) \cdot \boldsymbol{\nu}_R\} \boldsymbol{\tau}_R] \quad \text{on } \Gamma_{R0},$$

$$\mathbf{S}(\hat{\mathbf{u}}_P) \boldsymbol{\nu}_P = \alpha \{(\hat{\mathbf{u}}_P - \hat{\mathbf{u}}_R) \cdot \boldsymbol{\nu}_P\} \boldsymbol{\nu}_P \quad \text{on } \Gamma_{P0},$$

$$\mathbf{S}(\hat{\mathbf{u}}_P) \boldsymbol{\tau}_P = -\mu \alpha \{(\hat{\mathbf{u}}_P - \hat{\mathbf{u}}_R) \cdot \boldsymbol{\nu}_P\} \boldsymbol{\tau}_P \quad \text{on } \Gamma_{P0}$$

$$\hat{\mathbf{u}}_R = \hat{\mathbf{u}}_P \quad \text{on } (\Gamma_{R0} \cup \Gamma_{P0}), \quad \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{on } \Gamma_{D0}.$$

■ 形状最適化問題

モード次数 k は与えられると仮定する．評価関数を次のように定義する．

$$f_0(\phi, s_k) = 2\operatorname{Re}[s_k] = s_k + s_k^c,$$

$$f_1(\phi) = - \int_{\Omega_P(\phi)} dx + c_1.$$

問題 8.2 (体積制約つき複素固有値実部最小化問題)

次を満たす $\Omega_P(\phi)$ を求めよ．

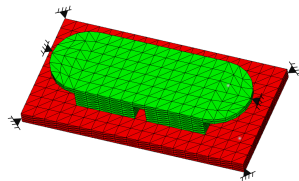
$$\min_{(\phi, \phi, s_k) \in \mathcal{D} \times \mathbb{C} \times \mathcal{S}} \{ f_0(\phi, s_k) \mid f_1(\phi) \leq 0, \text{ 問題 8.1} \}$$

■ 数値例

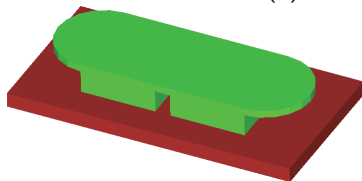
表 8.1: 複素固有値の変化

初期形状		
k	Re	Im
1	-1.692E+01	8.022947E+03
2	-1.444E+01	9.438261E+03
3	8.613E+00	1.249724E+04
4	-2.944E+01	1.437360E+04
5	-5.783E+01	1.629984E+04
6	-5.356E+01	2.168113E+04
7	-5.195E+01	2.394771E+04
8	-6.593E+01	2.573753E+04
9	-6.325E+01	2.711726E+04
10	-6.896E+01	2.893466E+04

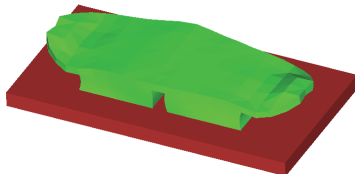
最適形状		
k	Re	Im
1	-1.647E+01	7.745197E+03
2	-1.765E+01	1.027973E+04
3	-1.163E+01	1.110440E+04
4	-3.048E+01	1.503565E+04
5	-4.185E+01	2.092213E+04
6	-5.070E+01	2.186379E+04
7	-6.588E+01	2.671747E+04
8	-7.522E+01	2.756015E+04
9	-7.540E+01	3.137934E+04
10	-7.658E+01	3.320161E+04



(a) 有限要素モデル



(a) 初期形状



(b) 最適形状

図 8.3: 形状比較

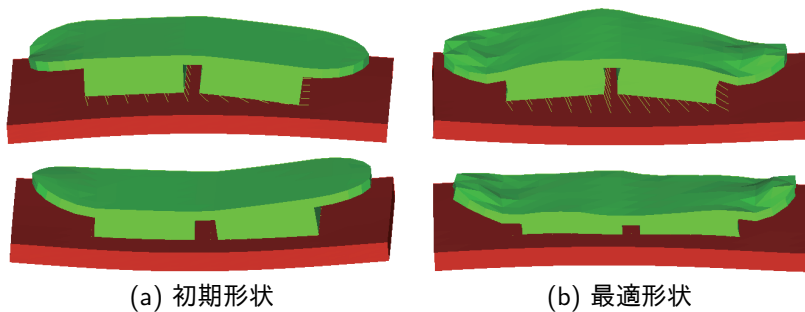
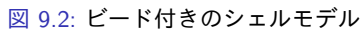


図 8.4: 3 次固有振動モードの比較

109 / 140



■ 状態決定問題

初期のシェルに対する中立面と領域

$$M_0 = \{ \mu_0(\xi) \in \mathbb{R}^3 \mid \xi \in D \},$$

$$\Omega_0 = \{ \mathbf{x} + \xi_3 \nu_0(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} \in M_0, \xi_3 \in (-t/2, t/2) \}$$

設計変数 $\theta : D \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, ビードの高さを次のようにおく.

$$\phi(\theta) = \frac{h}{\pi} \tan^{-1} \theta + \frac{h}{2}$$

変動後の中立面と領域

$$M(\theta) = \{ (\mu_0 + \phi(\theta) \nu_0 \circ \mu_0)(\xi) \mid \xi \in D \}$$

$$\Omega(\theta) = \{ \mathbf{x} + \xi_3 \nu(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} \in M(\theta), \xi_3 \in (-t/2, t/2) \}.$$

設計変数 θ の線形空間と許容集合

$$X(\theta) = \{ \theta \in H^1(D; \mathbb{R}) \mid \theta = 0 \text{ on } \bar{D}_{C0} \},$$

$$\mathcal{D} = X \cup W^{1,\infty}(D; \mathbb{R})$$

状態決定問題の解 (状態変数) $\hat{u}$ の線形空間と許容集合

$$U = \{ \hat{u} \in H^1(M(\theta); \mathbb{R}^5) \mid \hat{u} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^5} \text{ on } \Gamma_D(\theta) \}$$

$$\mathcal{S} = U \cap W^{2,2q_R}(\Omega(\theta); \mathbb{R}^5)$$

問題 9.1 (Mindlin-Reissner の板理論による線形弾性問題)

$\theta \in \mathcal{D}$ に対して, 次を満たす $\hat{\mathbf{u}} \in \mathcal{S}$ を求めよ.

$$\left. \begin{aligned} -\nabla_{\mathbf{M}}^{\mathrm{T}} \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{M}}(\hat{\mathbf{u}}) &= \bar{\mathbf{b}}^{\mathrm{T}} \\ -\nabla_{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{m}(\hat{\mathbf{u}}) &= \bar{p}_{\mathrm{N}3} \\ -\nabla_{\mathbf{M}}^{\mathrm{T}} \mathbf{M}(\hat{\mathbf{u}}) + \mathbf{m}(\hat{\mathbf{u}}) &= \bar{\mathbf{m}}^{\mathrm{T}} \end{aligned} \right\} \quad \text{in } M(\theta),$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{M}}(\hat{\mathbf{u}}) \boldsymbol{\nu}_{\mathbf{M}} &= \bar{p}_{\mathrm{N}} \\ \mathbf{m}(\hat{\mathbf{u}}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathbf{M}} &= \bar{p}_{\mathrm{N}3} \\ \mathbf{M}(\hat{\mathbf{u}}) \boldsymbol{\nu}_{\mathbf{M}} &= \bar{\mathbf{m}}^{\mathrm{T}} \end{aligned} \right\} \quad \text{on } \Gamma_p(\theta) \cap \partial M(\theta),$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{M}}(\hat{\mathbf{u}}) \boldsymbol{\nu}_{\mathbf{M}} &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2} \\ \mathbf{m}(\hat{\mathbf{u}}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathbf{M}} &= 0 \\ \mathbf{M}(\hat{\mathbf{u}}) \boldsymbol{\nu}_{\mathbf{M}} &= \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2} \end{aligned} \right\} \quad \text{on } (\Gamma_{\mathrm{N}}(\theta) \setminus \bar{\Gamma}_p(\theta)) \cap \partial M(\theta),$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^5} \quad \text{on } \Gamma_{\mathrm{D}}(\theta).$$

■ 形状最適化問題

$$f(\theta, \hat{\mathbf{u}}) = \int_{M(\theta)} (\bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{v}_M + \bar{p}_{N3} z - \bar{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{r}) \, dx \\ + \int_{\Gamma_p(\theta) \cap \partial M(\theta)} (\bar{\mathbf{p}}_N \cdot \mathbf{v}_M + \bar{p}_{N3} z - \bar{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{r}) \, d\gamma$$

問題 9.2 (平均コンプライアンス最小化問題)

次を満たす θ を求めよ.

$$\min_{(\theta, \hat{\mathbf{u}}) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S}} \{ f(\theta, \hat{\mathbf{u}}) \mid \text{問題 9.1} \}$$

■ 数値例

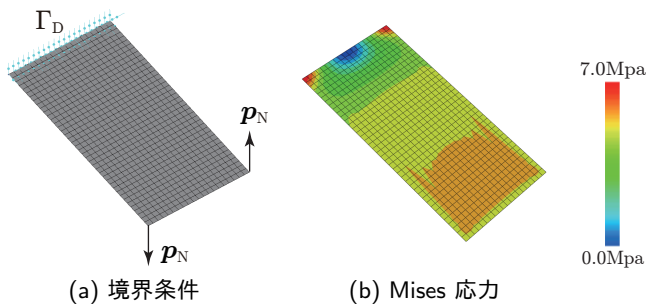


図 9.3: ねじり荷重をうける片持ちシェルの初期形状

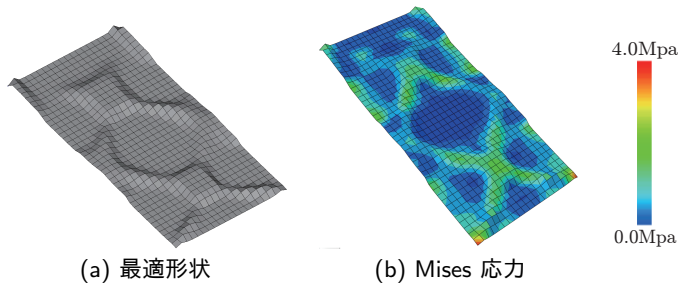


図 9.4: ねじり荷重をうける片持ちシェルの最適形状

§10 流れ場の安定性向上のための形状最適化問題 [6]

断面積が階段状に変化する Poiseuille 流れ場において，定常流から非定常流に移移する臨界 Reynolds 数 Re_c は 40 あたりであると報告されている．

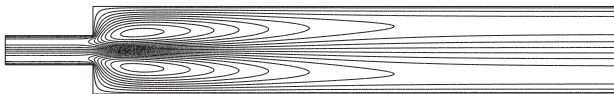


図 10.1: 段付き Poiseuille 流れ場

■ 状態決定問題

定常流の流速と圧力の線形空間と許容集合

$$U = \{ \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d) \mid \mathbf{u} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \partial\Omega(\phi) \},$$

$$U(\mathbf{u}_D) = \{ \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d) \mid \mathbf{u} = \mathbf{u}_D \text{ on } \partial\Omega(\phi) \},$$

$$\mathcal{S} = U \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d),$$

$$\mathcal{S}(\mathbf{u}_D) = U(\mathbf{u}_D) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d),$$

$$P = \left\{ q \in L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}) \mid \int_{\Omega(\phi)} q \, dx = 0 \right\},$$

$$\mathcal{Q} = P \cap L^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R})$$

問題 10.1 (定常 Navier-Stokes 問題)

$\phi \in \mathcal{D}$ に対して b, u_D, μ および ρ が与えられたとき,

$$\rho(u \cdot \nabla) u^T - \nabla^T (\mu \nabla u^T) + \nabla^T p = b^T \quad \text{in } \Omega(\phi),$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad \text{in } \Omega(\phi),$$

$$u = u_D \quad \text{on } \partial\Omega(\phi),$$

$$\int_{\Omega(\phi)} p \, dx = 0$$

を満たす $(u, p) \in \mathcal{S}(u_D) \times \mathcal{Q}$ を求めよ.

さらに, u と p のかく乱を $x \in \Omega(\phi)$ と $\tau \in [0, \infty)$ に対して,

$$\begin{aligned} u(\tau, x) &= u(0, x) + e^{s\tau} \hat{u}(x) + e^{s^c \tau} \hat{u}^c(x) = u(0, x) + 2\operatorname{Re}[e^{s\tau} \hat{u}(x)], \\ p(\tau, x) &= p(0, x) + 2\operatorname{Re}[e^{s\tau} \hat{p}(x)] \end{aligned}$$

と仮定する. ただし, $s \in \mathbb{C}$, $(\cdot)^c$ は複素共役を表す. $\hat{u}$ と $\hat{p}$ に対する線形空間と許容集合を次のようにおく.

$$\hat{U} = \{ \hat{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^d) \mid \hat{u} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \partial\Omega(\phi) \},$$

$$\hat{S} = \hat{U} \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^d),$$

$$\hat{P} = \left\{ \hat{q} \in L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}) \mid \int_{\Omega(\phi)} \hat{q} \, dx = 0 \right\},$$

$$\hat{Q} = \hat{P} \cap L^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$$

問題 10.2 (かく乱固有値問題)

$\phi \in \mathcal{D}$ に対して $(\mathbf{u}, p)$ が与えられたとき, $i \in \{1, 2, \dots\}$ に対して

$$\begin{aligned} \rho s \hat{\mathbf{u}}_i^T + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{u}}_i^T + \rho (\hat{\mathbf{u}}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}^T \\ - \nabla^T (\mu \nabla \hat{\mathbf{u}}_i^T) + \nabla^T \hat{p} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}^T \quad \text{in } \Omega(\phi), \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}_i = 0 \quad \text{in } \Omega(\phi),$$

$$\hat{\mathbf{u}}_i = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \quad \text{on } \partial\Omega(\phi),$$

$$\int_{\Omega(\phi)} \hat{p} \, dx = 0,$$

$$\int_{\Omega(\phi)} \rho \hat{\mathbf{u}}_i \cdot \hat{\mathbf{u}}_i^c \, dx = 1$$

を満たす $s_i \in \mathbb{C}$ と $(\hat{\mathbf{u}}_i, \hat{p}_i) \in \hat{\mathcal{S}} \times \hat{\mathcal{Q}}$ を求めよ.

■ 形状最適化問題

評価関数を **かく乱固有値実部**

$$f_0(s_r) = s_r + s_r^c = 2\operatorname{Re}[s_r]$$

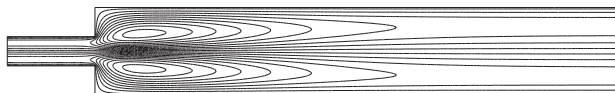
とおく．ただし， r は $\operatorname{Re}[s_i]$ が最大となるモード次数とする．

問題 10.3 (かく乱固有値実部の最小化問題)

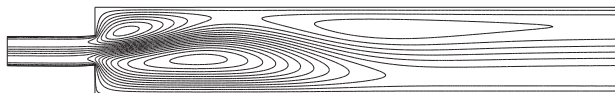
次を満たす $\Omega(\phi)$ を求めよ．

$$\min_{(\phi, \tilde{\mathbf{u}}, p, s_r, \hat{\mathbf{u}}_r, \hat{p}_r) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S} \times \mathcal{Q} \times \mathbb{C} \times \hat{\mathcal{S}} \times \hat{\mathcal{Q}}} \{f_0(s_r) \mid \text{問題 10.1, 問題 10.2}\}$$

■ 数値例



(a) 初期形状



(b) 最適形状

図 10.2: 段付き Poiseuille 流れ場 (初期領域において $Re = 45$)

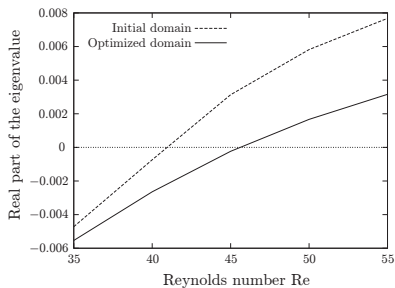


図 10.3: Reynolds 数に対する固有値の実部最大値の推移

静電容量式センサは指の検出などに使われる。

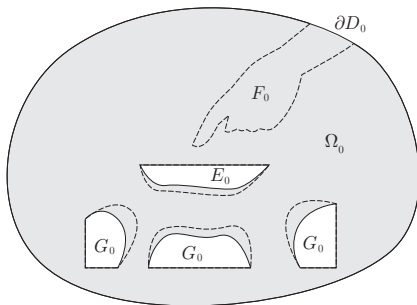


図 11.1: 初期静電場 $\Omega_0 = D_0 \setminus (\bar{E}_0 \cup \bar{G}_0)$

■ 状態決定問題

設計変数 ϕ の線形空間と許容集合

$$X = \{ \phi \in H^1(D_0; \mathbb{R}^d) \mid \phi = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d} \text{ on } \partial D_0 \cup \partial F_0 \cup \partial G_0 \cup \Gamma_{C0} \cup \bar{\Omega}_{C0} \},$$

$$\mathcal{D} = \{ \phi \in X \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d) \mid \text{全単射の条件} \}.$$

静電ポテンシャルの線形空間と許容集合

$$U = \{ u \in H^1(D_0; \mathbb{R}) \mid u = 0 \text{ on } \partial E(\phi) \cup \partial G(\phi) \},$$

$$U(u_D) = \{ u \in H^1(D_0; \mathbb{R}) \mid u = u_D \text{ on } \partial E(\phi) \cup \partial G(\phi) \},$$

$$\mathcal{S} = U \cap W^{1,\infty}(D_0; \mathbb{R}),$$

$$\mathcal{S}(u_D) = U(u_D) \cap W^{1,\infty}(D_0; \mathbb{R}),$$

とおく. ただし, $u_D \in H^1(D_0; \mathbb{R}) \cap W^{1,\infty}(D_0; \mathbb{R})$ は $\partial E(\phi)$ 上で $u = \alpha$, $\partial G(\phi)$ 上で $u = 0$ を満たす関数とする.

問題 11.1 (基本静電場)

$\phi \in \mathcal{D}$ に対して, 正定数 α が与えられたとき,

$$-\nabla \cdot \mathbf{e}(u) = 0 \quad \text{in } \Omega(\phi) = D_0 \setminus (E(\phi) \cup G(\phi)),$$

$$\partial_\nu u = 0 \quad \text{on } \partial D_0(\phi),$$

$$u = \alpha \quad \text{on } \partial E(\phi),$$

$$u = 0 \quad \text{on } \partial G(\phi)$$

を満たす, $u \in \mathcal{S}(u_D)$ を求めよ.

問題 11.2 (検出体がある静電場)

$\phi \in \mathcal{D}$ と正定数 α が与えられたとき,

$$-\nabla \cdot \mathbf{e}(u_F) = 0 \quad \text{in } \Omega(\phi) \setminus F_0 = D_0 \setminus (E(\phi) \cup G(\phi) \cup F_0),$$

$$\partial_\nu u_F = 0 \quad \text{on } \partial D_0(\phi),$$

$$u_F = \alpha \quad \text{on } \partial E(\phi),$$

$$u_F = 0 \quad \text{on } \partial G(\phi) \cup \bar{F}_0$$

を満たす $u_F \in \mathcal{S}(u_D)$ を求めよ.

■ 形状最適化問題

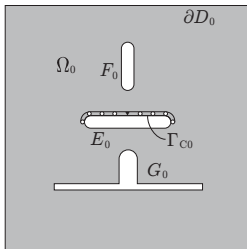
$$\begin{aligned}
 f_0(\phi, u, u_F) &= -\|u - u_F\|_{H^1(\Omega(\phi) \setminus F_0(\phi); \mathbb{R})}^2 \\
 &= -\int_{\Omega(\phi) \setminus F_0} \left\{ (u - u_F)^2 + (\mathbf{e}(u) - \mathbf{e}(u_F)) \cdot (\mathbf{e}(u) - \mathbf{e}(u_F)) \right\} dx, \\
 f_1(\phi) &= \int_{E(\phi)} dx - s_1
 \end{aligned}$$

問題 11.3 (体積制約つき静電場間の誤差ノルム最小化問題)

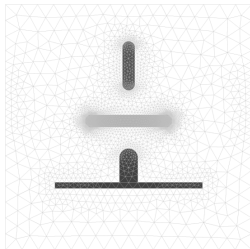
次を満たす $\Omega(\phi)$ を求めよ.

$$\min_{(\phi, u, u_F) \in \mathcal{D} \times \mathcal{S}(u_D) \times \mathcal{S}(u_D)} \left\{ f_0(\phi, u, u_F) \mid f_1(\phi) \leq 0, \text{ 問題 11.1, 問題 11.2} \right\}$$

■ 数值例

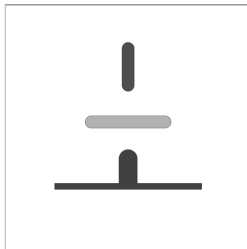


(a) 問題設定

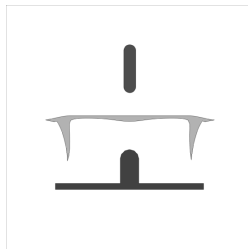


(b) 有限要素モデル

図 11.2: 突き出た接地電極のある 2 次元静電場

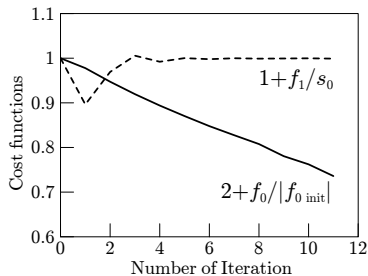


(a) 初期

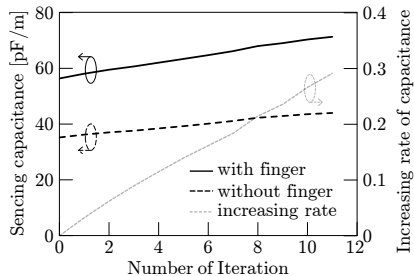


(b) 最適化後 (未収束)

図 11.3: 領域変動前後の形状

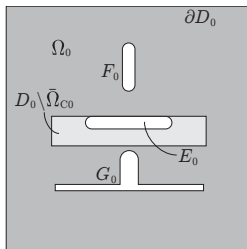


(a) 評価関数

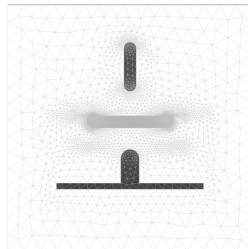


(b) 性能

図 11.4: 形状変動に対する繰返履歴



(a) 問題設定



(b) 有限要素モデル

図 11.5: 突き出た接地電極のある 2 次元静電場 ($E(\phi) \subset D_0 \setminus \bar{\Omega}_{C0}$)

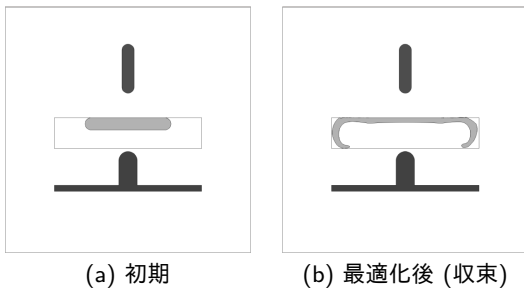
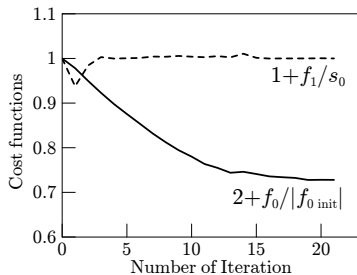
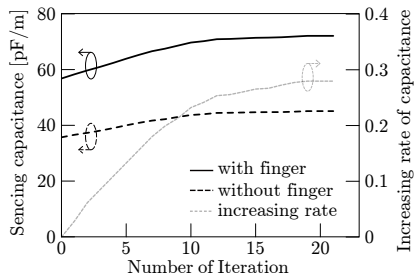


図 11.6: 領域変動前後の形状 ($E(\phi) \subset D_0 \setminus \bar{\Omega}_{C0}$)



(a) 評価関数



(b) 性能

図 11.7: 形状変動に対する繰返履歴 ($E(\phi) \subset D_0 \setminus \bar{\Omega}_{C0}$)

12 FreeFEM++を用いた実習

① H^1 勾配法 / H^1 Newton 法

2次元線形弾性体 (平均コンプライアンス最小化問題, hook):

9.11.5_shape_elastic/2d-hook/domain_integral/grad/

9.11.5_shape_elastic/2d-hook/domain_integral/Newton/

② 有限要素の次数: 1 次要素 / 2 次要素

3次元線形弾性体 (平均コンプライアンス最小化問題, cantilever):

9.11.5_shape_elastic/3d-cantilever/boundary_integral/grad/

main.edp ファイルをテキストエディタで開き,

fespace Vh(Th,[P2,P2,P2]); // Finite element space を

fespace Vh(Th,[P1,P1,P1]); // Finite element space に変更する.

③ 特異点の挙動: 境界積分型形状微分 / 領域積分型形状微分

2次元線形弾性体 (平均コンプライアンス最小化問題, L-shape):

9.11.5_shape_elastic/2d-L-shape/boundary_integral/grad/

9.11.5_shape_elastic/2d-L-shape/domain_integral/grad/

13 まとめ

- ① 最適設計問題は、状態決定問題が等式制約として加わった不等式つき非線形最適化問題のクラスとみなすことができる。その解法は勾配法や Newton 法に基づいて構成される。
- ② 連続体の形状最適化問題への拡張は関数解析によって実現される。
- ③ 製品設計に役立つような問題を適切に構成できれば、それらを解くことは可能となっている。

参考文献

[1] 畔上 秀幸.

形状最適化問題.

森北出版, 東京, 10 2016.

[2] H. Azegami.

Second derivatives of cost functions and h1 newton method in shape optimization problems.

In Patrick van Meurs, Masato Kimura, and Hirofumi Notsu, editors, Mathematical Analysis of Continuum Mechanics and Industrial Applications II, Proceedings of the International Conference CoMFoS16, Mathematics for Industry 30, pages 61–72.

Springer Singapore, 12 2017.

[3] H. Azegami, L. Zhou, K. Umemura, and N. Kondo.

Shape optimization for a link mechanism.

Structural and Multidisciplinary Optimization, 48(1):115–125, 2 2013.

参考文献 (cnt.)

- [4] K. Shintani and H. Azegami.

Shape optimization for suppressing brake squeal.

Structural and Multidisciplinary Optimization, 50(6):1127–1135, 5 2014.

- [5] K. Shintani and H. Azegami.

A design method of beads in shell structure using non-parametric shape optimization method.

In Proceedings of the the ASME 2014 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference (IDETCCIE 2014) (eBook), pages 1–8, 8 2014.

- [6] T. Nakazawa and H. Azegami.

Shape optimization of flow field improving hydrodynamic stability.

Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 10 2015.

Accepted.

参考文献 (cnt.)

- [7] Masayoshi Satake, Noboru Maeda, Shinji Fukui, and Hideyuki Azegami.

Shape optimization of electrostatic capacitive sensor.

In Proceedings of the 10th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO-10) (USB), pages 1–10, 5 2013.