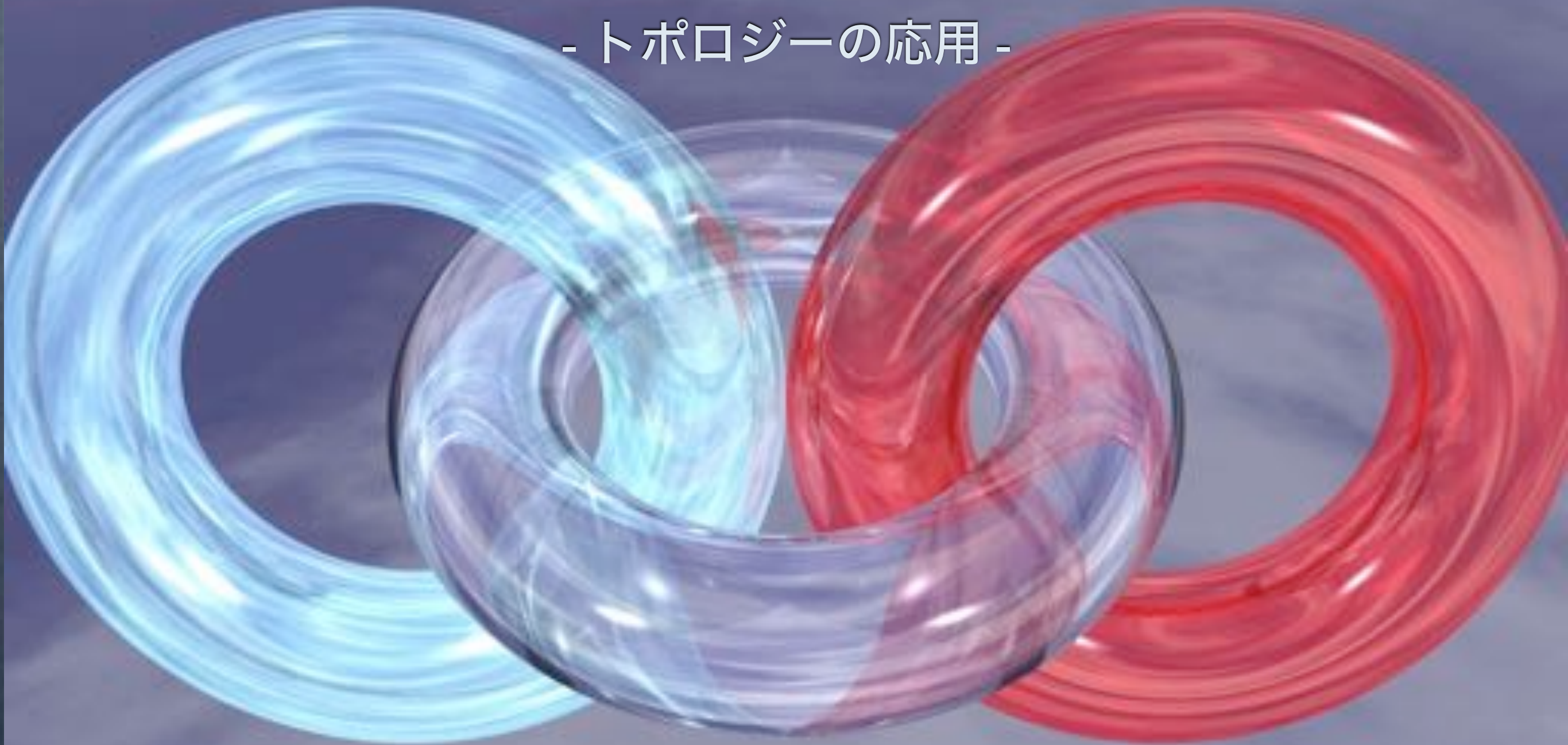


柔らかい幾何の拡がり

- トポロジーの応用 -



山口大学 創成科学研究科 / JSTさきがけ 鍛冶静雄

AIMaP公開シンポジウム「数学と産業の協働ケーススタディ」

日本橋ライフサイエンスビルディング、2018年1月20日

専門分野



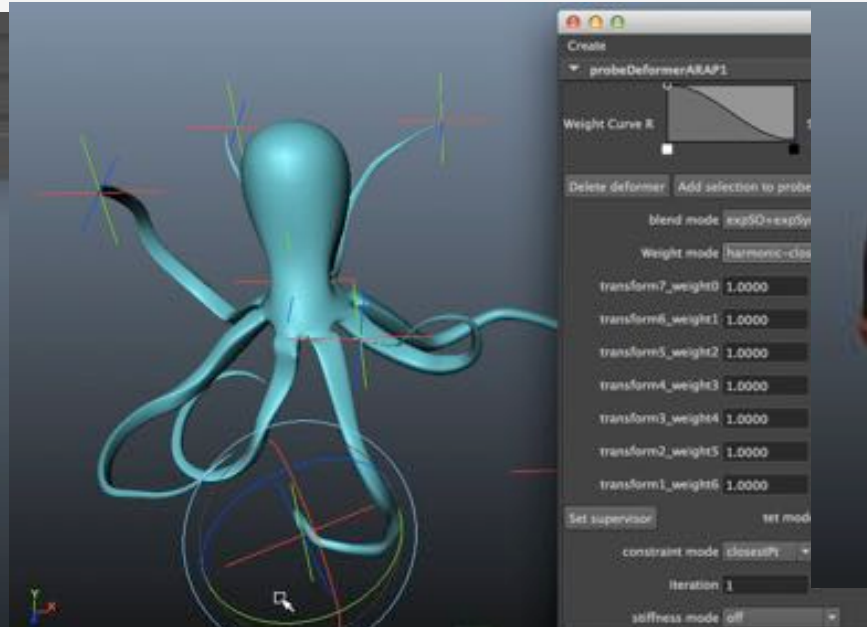
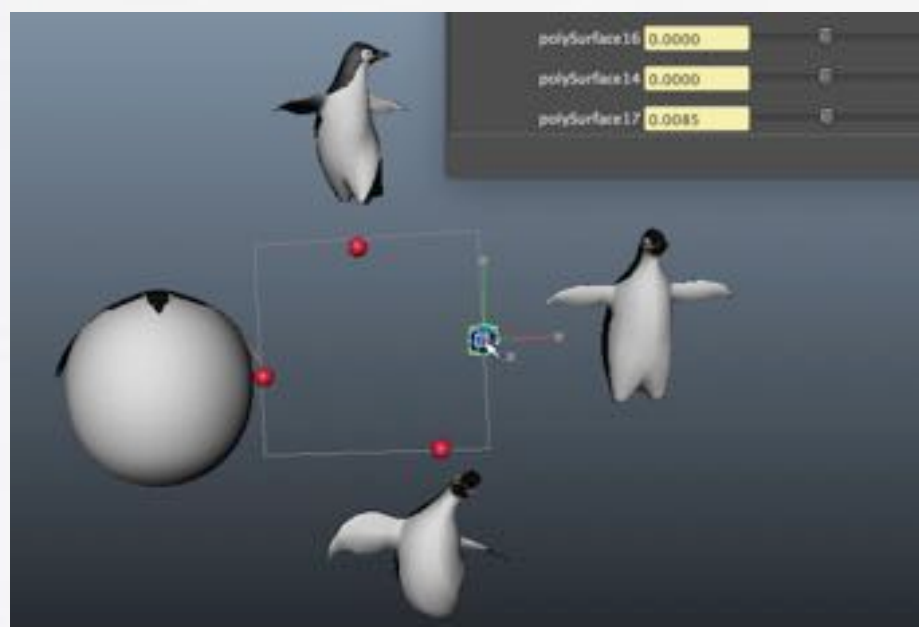
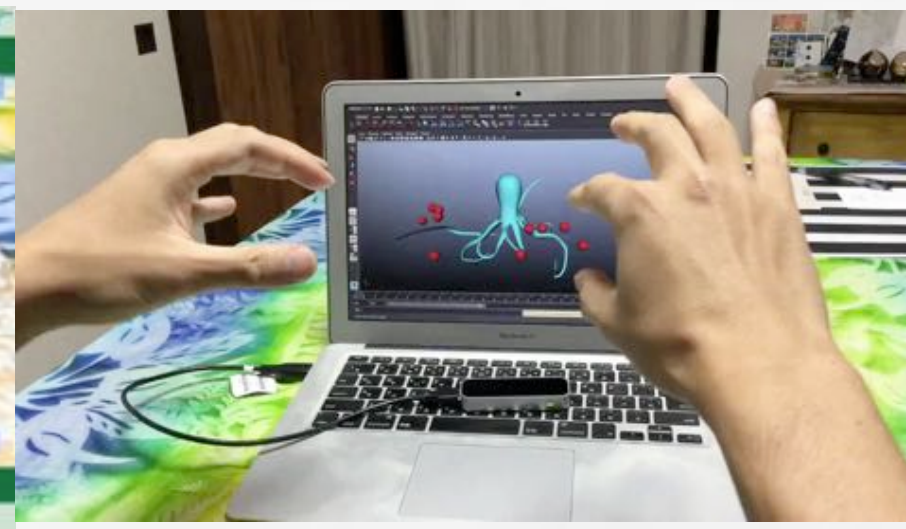
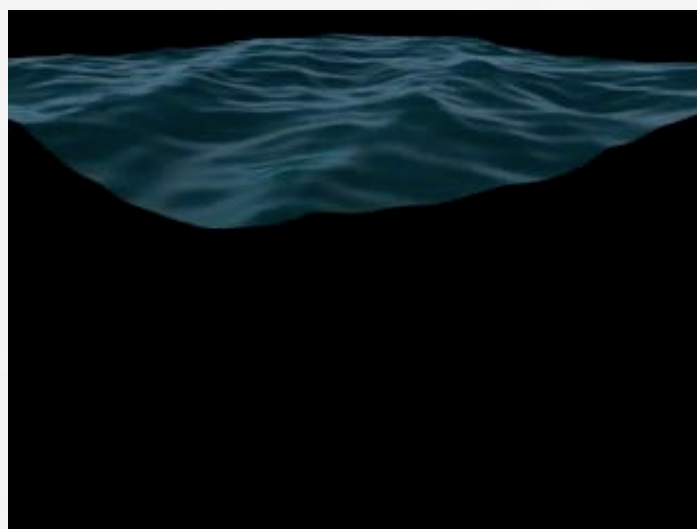
トポロジーの研究

高い対称性を持った空間の構造

背景は E_8 という248次元の空間
(wikipedia より)

トポロジーの研究

CGやデータ解析への応用



アイデア・イメージ・直感

抽象

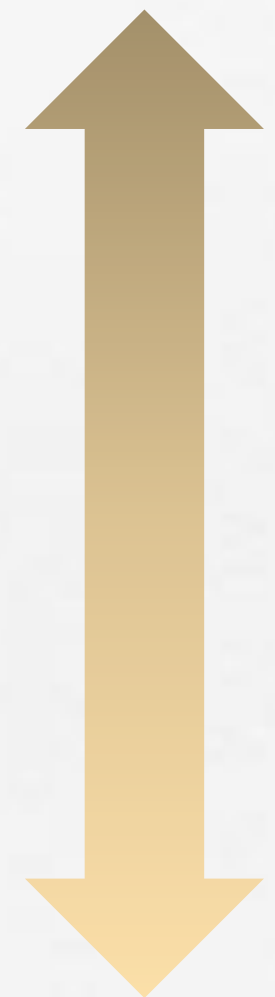
数学

言語化・共有性・再現性

計算機

実用化

具体



トポロジーとは

様々な幾何学

- 辺の長さが2倍になると面積は4倍
- 3辺の比が3 : 4 : 5なら直角三角形
- 三角形の内角の和は180度
- 多面体の面数-辺数+頂点数=2

「長さ」の概念に依存

「比」の概念に依存

「まっすぐ」の概念に依存

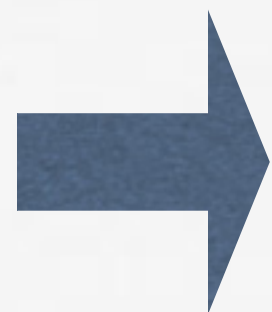
「連続」の概念に依存

着目する性質によって色々な幾何がある
下へいくほどより"アバウト"

図形の柔らかな性質

- 実際の世界に、きっちり三角形のものや、完全に球体なものは存在しない
- 図形以外のもの、例えばデータの解析にも使いたい
細かすぎるデータから俯瞰的な情報を得たい

図形の“大雑把な” 性質が役に立つはず



トポロジー

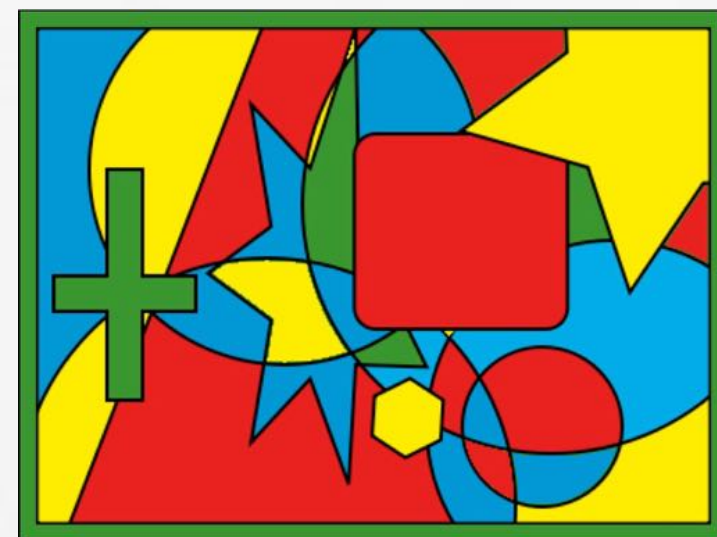
(位相幾何学)

連続的な変形で不変な性質

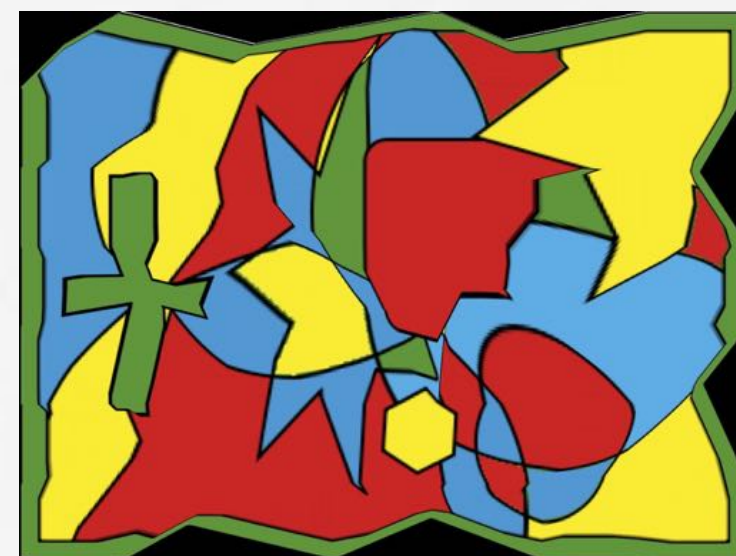


(wikipedia)

穴の数



(wikipedia)



塗分けに必要な色数

トポロジーの視点

- 図形とはデータの集まりであり、トポロジーはその見方(整理法)に一つの指針を与える
 - 潜在構造の顕在化・指標の構成
- 直感的な現象を数学的に定式化する言語
 - データ間の関係・対応・時間変化・変形を記述
 - 問題をコンピューターで扱える形に翻訳
 - コンピューターの苦手な大局的な情報が拾える

トポロジーズの道具箱

--ホモロジーズ--

(位相)不変量とは

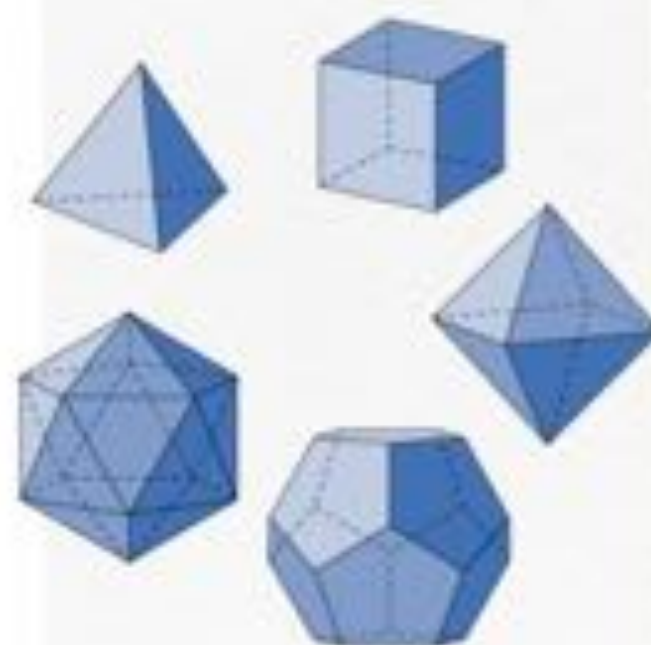
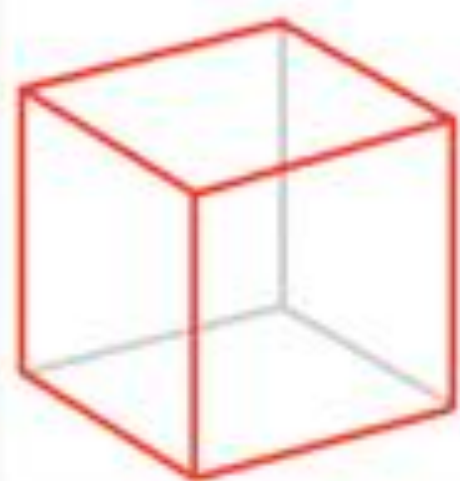
- 図形の特徴を数値化する
- 連続的な変形によって変わらない
- 具体的に“計算”が可能



問題に応じて良い不変量を見つける

オイラーの多面体定理

$$\text{面の数} - \text{辺の数} + \text{頂点の数} = 2$$

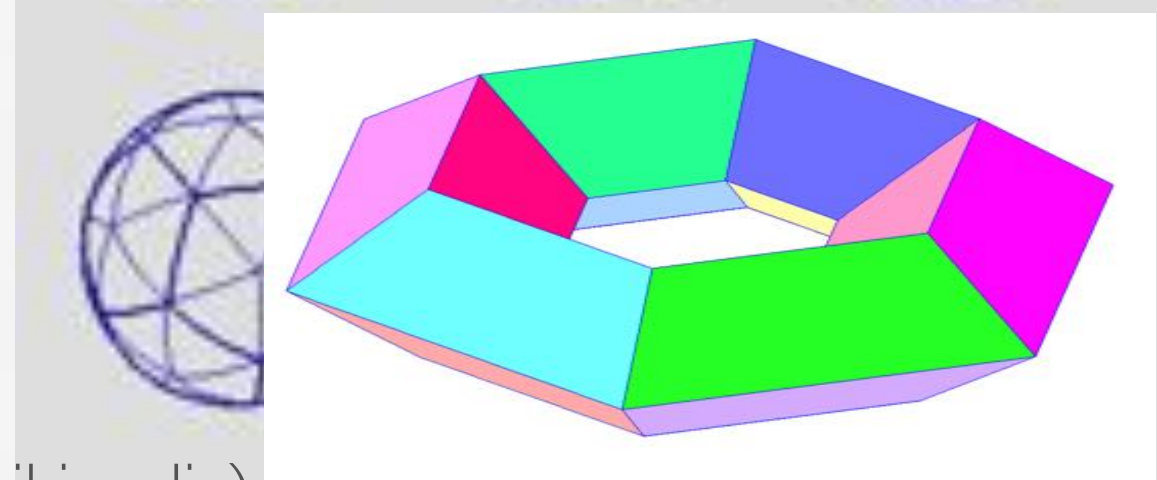
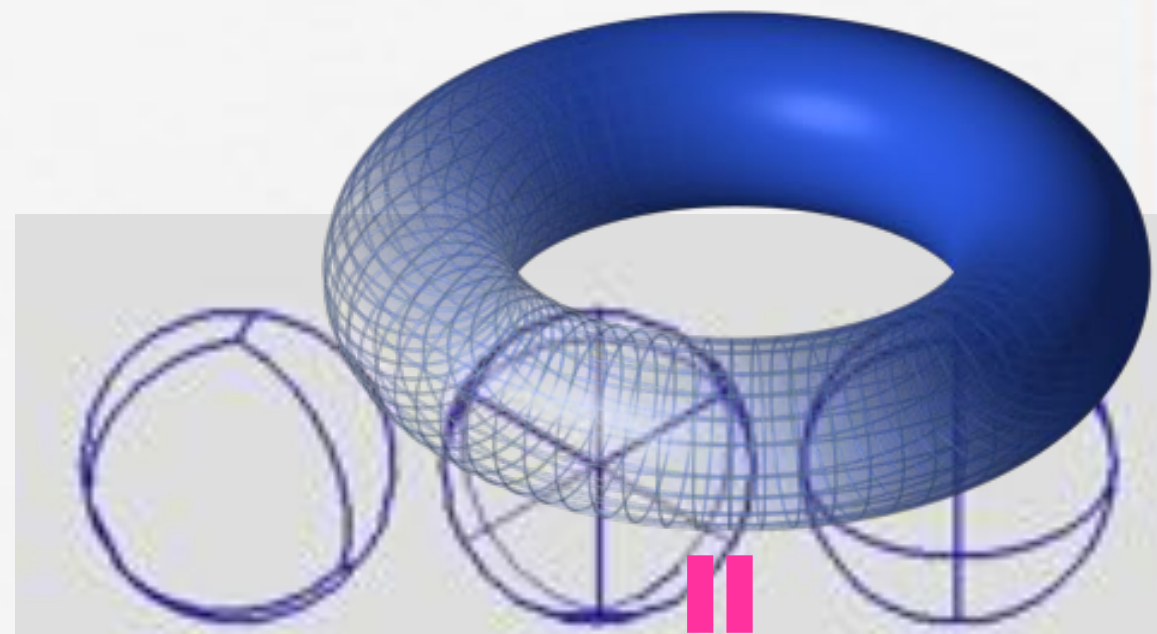


空気を入れて膨らませば、全て球面

球面とドーナツの違い

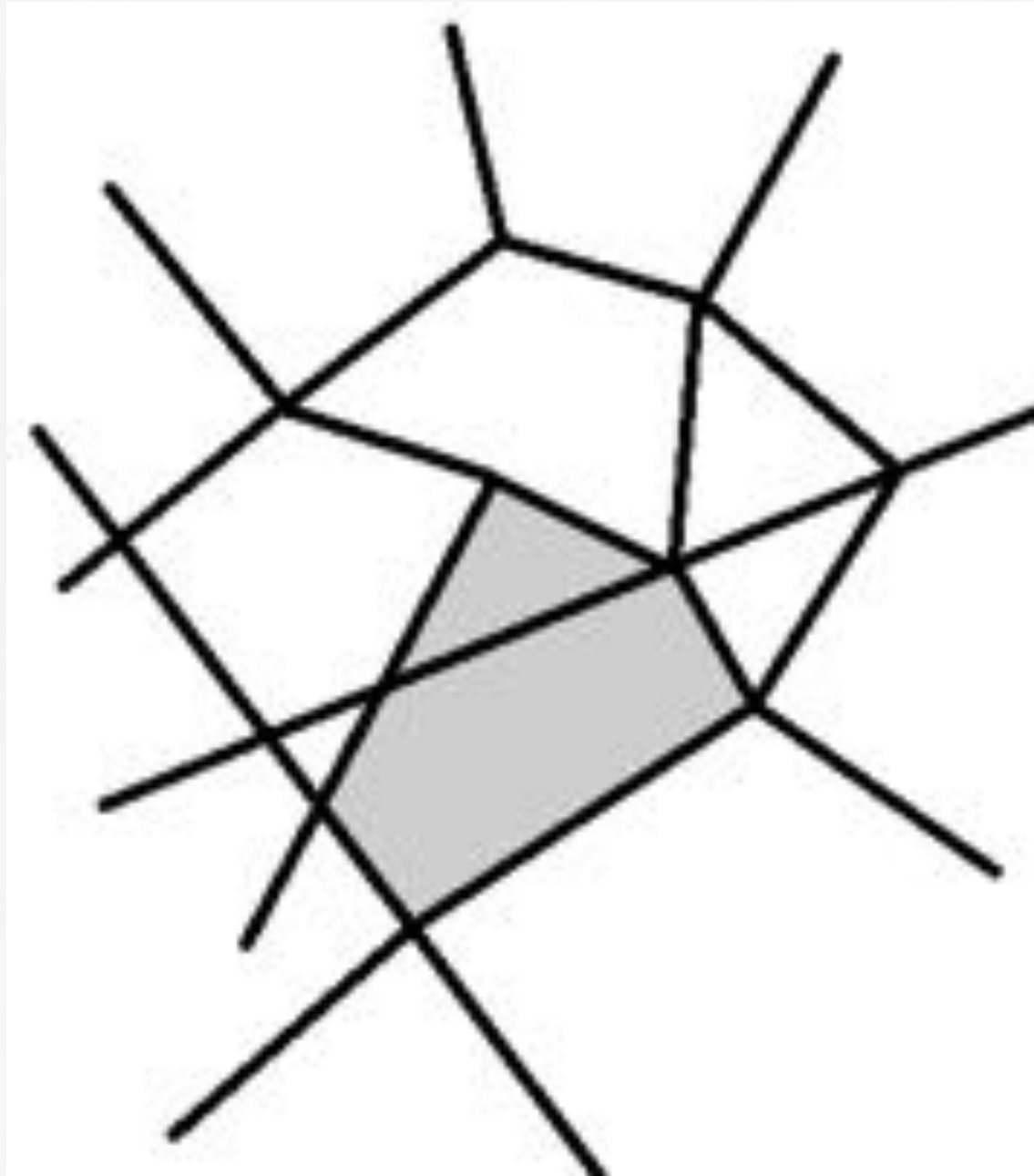
- 点-線+面の数をオイラー数といい、これは位相不変量
- 球をどのように分割しても **2**
- 球に穴が1つあいていると **1**
- ドーナツ型だと **0**

形の違いを捉えている！



(wikipedia)

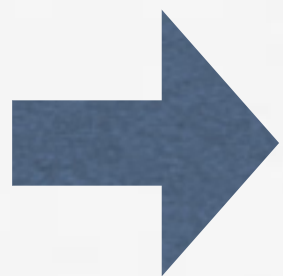
基本的なアイデア (局所から大域へ)



- 領域を多角形に分割
(一部分を拡大表示)
- 点-線+面を考える
 - 分割を細分
→ 線 + 1 · 面 + 1 ▷ 全体 ± 0
 - 穴をあける
→ 面 - 1 ▷ 全体 - 1
 - 穴を広げる
→ 点 - 2 · 線 - 1 · 面 + 1
▷ 全体 ± 0

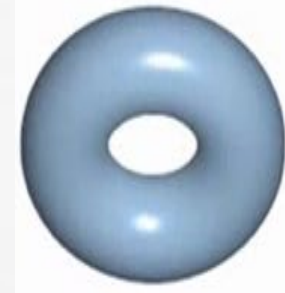
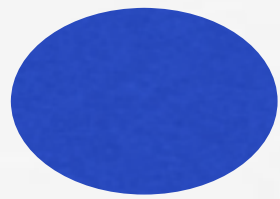
ホモロジー

- オイラーの多面体定理の高次元化&精密化
- 図形の連結成分の数・穴の数・空洞の数・・・
- コンピューターによる計算が容易



物体やデータの”形”
の手がかりになる

いろいろな形のホモロジー



b_0
連結成分

1

1

1

1

1

1

b_1
輪

0

0

1

2

2

0

b_2
空洞

0

0

0

1

1

1

オイラー数
 $b_0 - b_1 + b_2$

1

1

0

0

0

2

例題：ウサギに
穴があいていな
いか調べたい



(Stanford bunny)

穴あきウサギ

X: ウサギ

b_i : i -次元ベッチ数

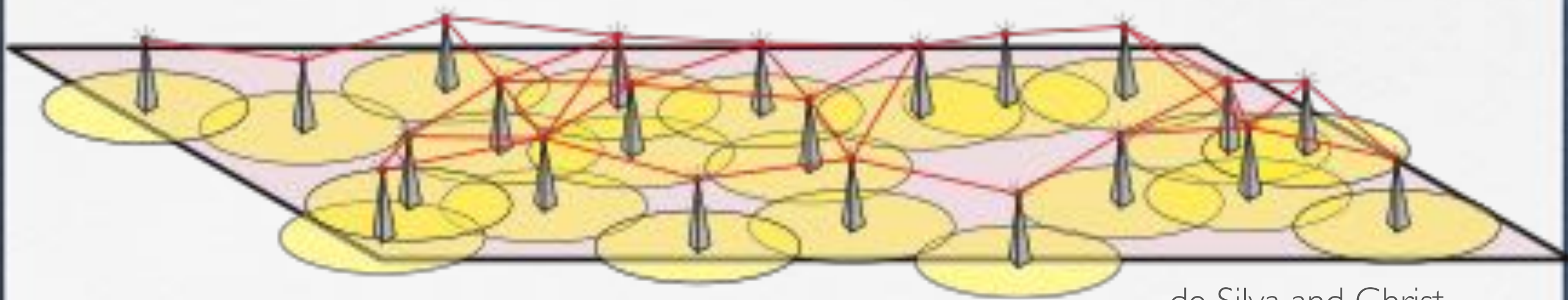
(i -次元の"穴"の数)

- **$b_0(X)=1$**
ちゃんと繋がっている
- **$b_1(X)=7$**
破れが8つある
- **$b_2(X)=0$**
空洞はない(水漏れする)



例題：ある領域に沢山のセンサーを設置する。
全ての地点が通信半径に収まっているか知りたい

- 各々のセンサーの位置は不明
- 互いに通信し合えるセンサーの組は分かっている



de Silva and Ghrist

ホモロジーを計算することでカバーの穴を探せる

ホモロジーの産業応用体験談

陥没穴探索問題

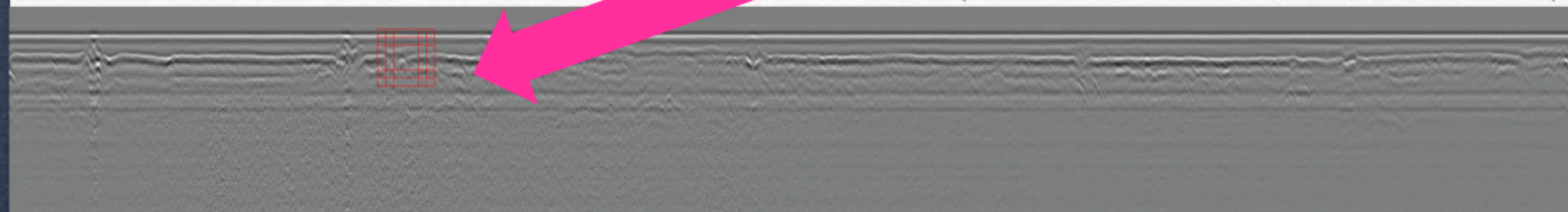
with T. Kim, S. Choi, GK Engineering



Ground-Penetrating-Rader
(wikipedia)



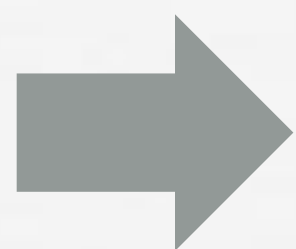
博多駅前の道路陥没
(2016年11月 朝日新聞デジタル)



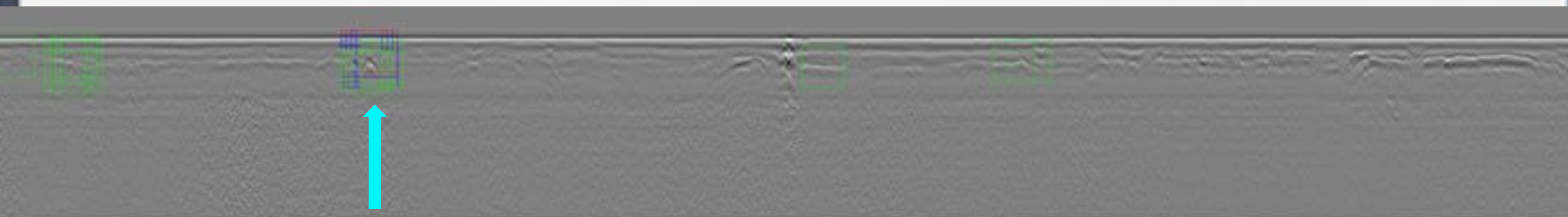
センサーデータから、道路の下に空いた穴を検知

陥没穴探索問題

見るからに機械学習が有効そう



実際に、畳込みニューラルネット (CNN)
の設計を詰めていくと、
熟練者並みのパフォーマンスが出た

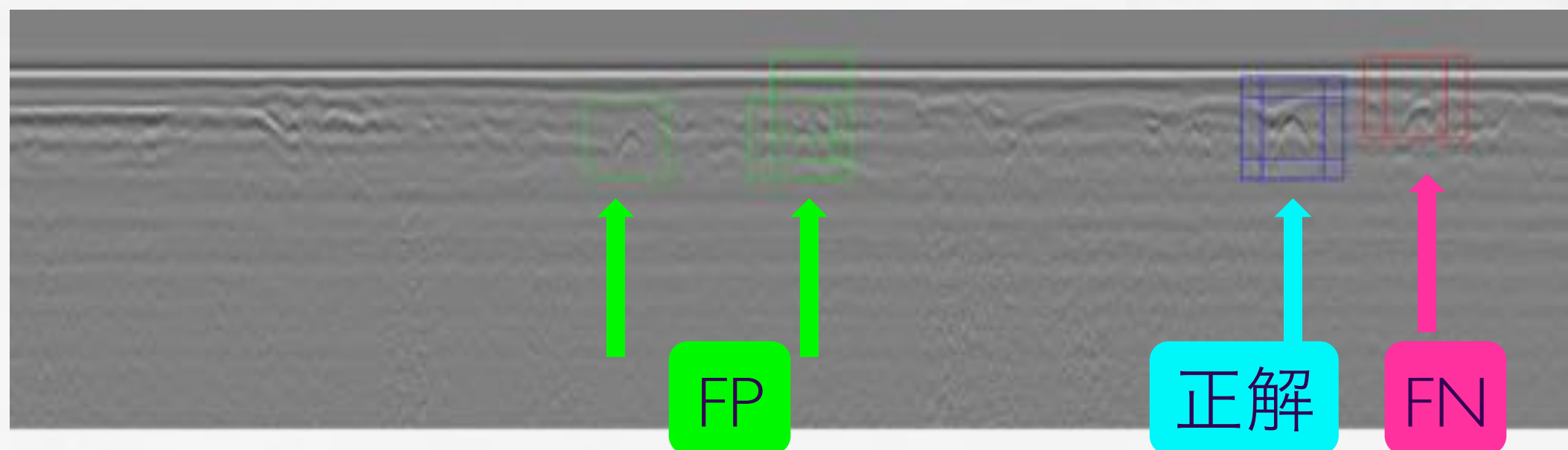


検出

...トポロジーは？

陥没穴探索問題

問題の性質上、穴が見過ごされる(False Negative)ことは致命的。が、辛い判定にするとたくさんの誤検知(False Positive)が出てくる。



このトレードオフを改善したい

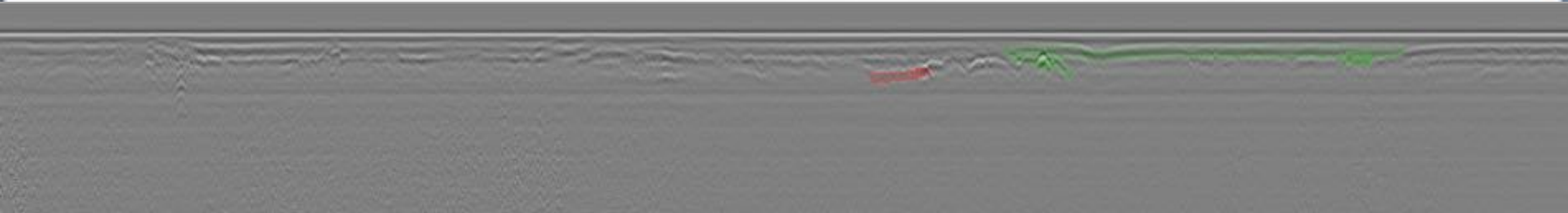
トポロジーを使ってみよう



パーシステントホモロジー

穴が検知されている！
この情報を有効活用しよう

トポロジー X 深層学習



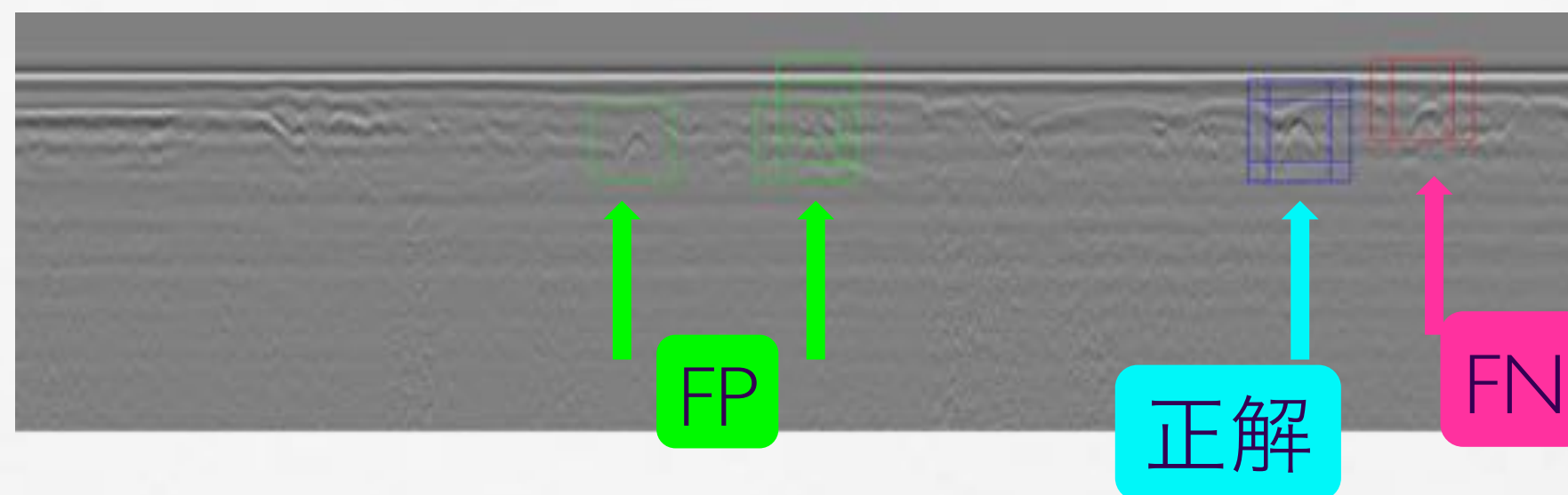
パーシステントホモロジーの情報を
ヒント画像にエンコード(サイクルの寿命を輝度値に)



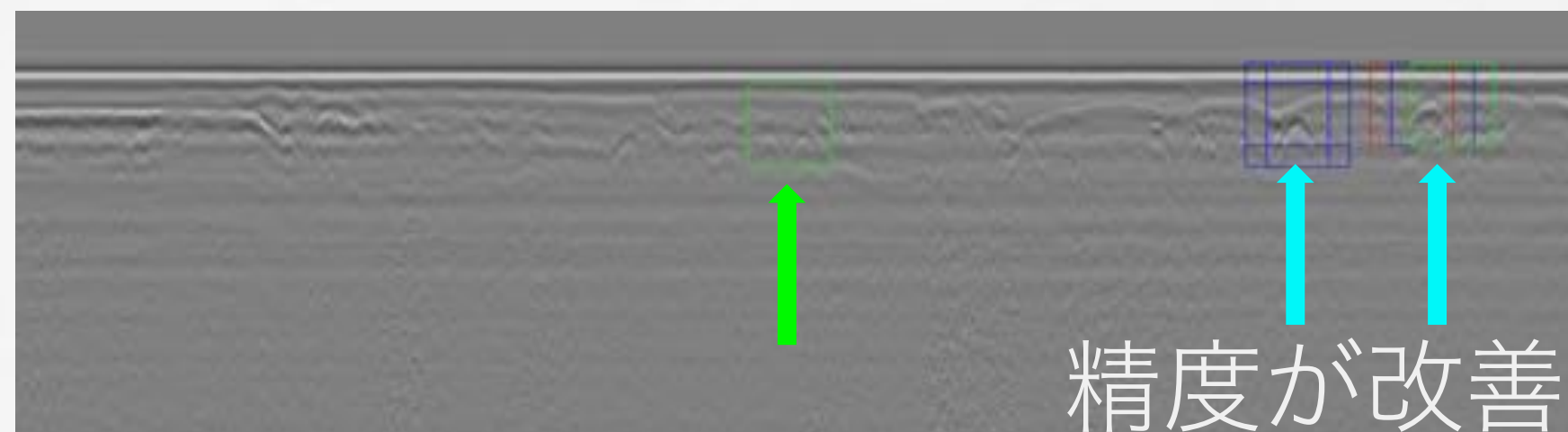
この画像を、もとのセンサー画像にバンドルして
畳込みニューラルネットにフィードする

ホモロジー・アシステッド深層学習

ホモロジー
情報なし



ホモロジー
情報付加



直感：CNNでは局所的な情報しか見ない
“穴”といった大域情報の学習をホモロジーが手助け

データシート

- 画像 3065x437x24ch 40枚
- 陥没穴 43個（大きさは 40x40 程度）
- 5-fold cross validation
- ネットワーク: NIN+residual+BN+leakyReLU
- ソフトウェア: Chainer, Dionysus
- 機材: Core i7-6700K+64GB+GeForce1080

まとめ

- トポロジーは細かいことを捨象することで、大きな繋がりを見る
ロバストな定量化ができる
- トポロジーはローカルとグローバルを繋ぐ
データー構造と言語を提供する
- 機械学習・トポロジー・その他
手法ごとに得手不得手があるので、
合わせ技が効果的
- 数学者としては
応用からの要請が新しい数学を生むと嬉しい

ご静聴

ありがとうございました